

Armando
Rangel
Galán



**Teoría de la Realización.
Proyección de coeficientes
técnicos en México,
1993-2017**



Teoría de la Realización.
Proyección de coeficientes técnicos
en México, 1993-2017



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Dr. Enrique Graue Wiechers

Rector

Dr. Leonardo Lomelí Vanegas

Secretario General

Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria

Secretario Administrativo

Dra. Guadalupe Valencia García

Coordinadora de Humanidades



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS

Dr. Armando Sánchez Vargas

Director

Dr. José Manuel Márquez Estrada

Secretario Académico

Ing. Patricia Llanas Oliva

Secretaria Técnica

Mtra. Graciela Reynoso Rivas

Jefa del Departamento de Ediciones

Teoría de la Realización.
Proyección de coeficientes técnicos
en México, 1993-2017

Armando Rangel Galán

Premio Anual de Investigación Económica
Maestro Jesús Silva Herzog
Primer lugar. Versión externa (2021).



Primera edición digital en pdf, noviembre 2023

D.R. © UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Ciudad Universitaria, Coyoacán,
04510, Ciudad de México.
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS
Circuito Mario de la Cueva s/n,
Ciudad de la Investigación en Humanidades,
04510, Ciudad de México.

ISBN IIEC-UNAM: 978-607-30-8409-3
DOI: <https://doi.org/10.22201/iiec.9786073084093e.2023>

Diseño de portada: Laura Elena Mier Hughes.
Cuidado de la edición: Héliida De Sales Y.

La presente obra obtuvo el primer lugar en la versión externa del Premio Premio Anual de Investigación Económica Maestro Jesús Silva Herzog, en su edición 2021, con el título original de *Teoría de la realización como método de proyección de los coeficientes técnicos de la matriz insumo-producto: desarrollo teórico y un ejemplo de implementación para el caso de México, 1993-2017*.

Las opiniones expresadas en esta obra son de exclusiva responsabilidad del autor.

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Impreso y hecho en México.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	9
0. INTUICIÓN GENERAL DE LA TEORÍA DE LA REALIZACIÓN	13
1. REALIZACIÓN MÍNIMA DE SUCESIONES INFINITAS	19
2. TEORÍA DE LA REALIZACIÓN: FINITUD Y ALEATORIEDAD	33
3. REALIZACIÓN PARCIAL: APLICACIÓN A UN MODELO <i>INPUT-OUTPUT</i>	51
CONCLUSIONES	65
APÉNDICE A. ÁLGEBRA LINEAL, TEORÍA DE LA REALIZACIÓN Y DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES	69
A.1. Álgebra lineal	69
A.2. Teoría de la Realización	83
APÉNDICE B. REALIZACIÓN PARCIAL ESTOCÁSTICA	95
APÉNDICE C. ALGORITMOS Y CÓDIGOS DE LOS PROGRAMAS	107
Código C.1. Módulo realpar	107
Código C. 2. Dimensión del espacio de columnas pares de la MH del capítulo 1	109
Código C. 3. Realización mínima de la sucesión finita del capítulo 2 sección 1	109

Código C. 4. Realización mínima de la sucesión finita y aleatoria del capítulo 2 sección 2	110
Código C. 5. Realización de la matriz inversa de Leontief del capítulo 3	111
CUADRO C. 1. DATOS TRIMESTRALES DE MÉXICO, 1993-2018	115
SÍMBOLOS MATEMÁTICOS	121
BIBLIOGRAFÍA	123
SEMBLANZA	127

INTRODUCCIÓN

En la presente obra se dilucida qué es, cuál es el sustento formal, cómo poder emplear y cuáles son los límites de la *Teoría de la Realización* (TR) como método de predicción de los elementos que siguen en una sucesión de matrices o *descripción externa* (DE), finita y aleatoria en un tipo de sistemas dinámicos. En específico, para implementarla sobre la sucesión de matrices de Leontief del modelo de insumo-producto, con el fin de proyectar las matrices de coeficientes técnicos. El formato aquí expuesto sobre la TR no se sirve de métodos de la teoría estadística para originar la proyección de datos con ruido, sin embargo, sí existe una propuesta para hacer frente a la aleatoriedad de los datos.

La estructura de la exposición está constituida por cuatro capítulos. El capítulo inicial es el capítulo 0. En este apartado se exhibe la TR de forma sucinta, intuitiva y metódica, para que el lector pueda generar una idea global acerca de ella; además, tiene por objetivo facilitar la lectura de los siguientes capítulos.

Por su parte, el capítulo 1 se dedica a esclarecer el tipo de sistema que se emplea, así como los conceptos matemáticos clave y sus relaciones. De forma destacada, la definición de *matriz de Hankel* (MH) y el teorema de realización mínima, cuya demostración señala cómo crear una *descripción interna* (DI) mínima, esto es, cómo crear tres matrices F , G y H mediante una DE infinita tal que el i -ésimo elemento en la DE sea igual a $HF^{i-1}G$, además de asegurar que no existe otra DI de menor dimensión.

En el capítulo 2 se imponen dos condiciones realistas a la TR en sendos subapartados. En el primero, se desarrolla la TR bajo la condición de finitud de la DE. Se aclara cómo funciona el algoritmo para originar la DI de esta DE finita. A su vez, se menciona la manera en que el algoritmo es computacionalmente menos costoso al hacer admisible que la DI asociada con una DE sea parte de la DI asociada con una expansión de elementos de la DE.

En el segundo subapartado se agrega el supuesto de aleatoriedad a los elementos de la DE. Se clarifica cómo su incorporación impide realizar la DI con la teoría hasta ahí expuesta. Sin embargo, se plantea una extensión de la TR para hacer frente a tal situación. Esta extensión parte de reducir la aleatoriedad de la MH empleando el teorema de descomposición en valores singulares. Asimismo, se muestra el modo en que este proceso genera varias matrices reducidas, las cuales inducen una DI próxima a la DE. Además, se introduce una manera de seleccionar dentro de todas estas aproximaciones, la más idónea.

El tercer y último capítulo está dedicado a exponer un ejemplo de implementación de la TR finita y aleatoria para la proyección de los coeficientes¹ del modelo entrada-salida $Q_t = (I_2 - P_t)^{-1} R_t$ Donde

$$P_t = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, Q_t = \begin{pmatrix} Y_t^* \\ M_t \end{pmatrix} \text{ y } R_t = \begin{pmatrix} K_t \\ K_t^m \end{pmatrix}$$

Este se deriva del modelo contable: $Y^* = C + X + K$ y $M = Mc + K^m$. Donde Y^* es la demanda final, C el consumo interno privado y de gobierno, X las exportaciones totales, K la

¹ Estos no son coeficientes técnicos porque no provienen de un proceso de producción sino de dos procesos de generación del ingreso mediante ecuaciones macroeconómicas: la del ingreso interno y la del ingreso del resto del mundo originado de la economía de un país. Sin embargo, debido a la cantidad de información disponible para generar estos coeficientes y a que la aplicación de la TR al ámbito de la producción, es decir, de los coeficientes técnicos, sería idéntica, pueden ocuparse como una forma equivalente desde el punto de la TR.

formación bruta de capital fijo más la variación de existencias, M las importaciones totales, M_t^c las importaciones de mercancías para consumo intermedio y final, y K^m las importaciones de inversión bruta de capital fijo. Posteriormente, con datos trimestrales de México de 1993 hasta 2017 se calculan las matrices de Leontief $(I_2 - Pt)^{-1}$, se implementa la TR finita y aleatoria mediante el código C.5 y se interpretan los resultados obtenidos.

En su mayoría, los elementos formales del trabajo (lemas, teoremas, corolarios, definiciones y demostraciones) se encuentran en los apéndices A y B. Con ello se evita sobrecargar los capítulos, sorteando las secuelas de la distracción y el extravío del lector. Por otro lado, las demostraciones se han realizado de forma operativa más que conceptual o, en su defecto, se ha indicado dónde pueden hallarse con dicha característica. Esto permite que el lector asimile cálculos expresos más que cadenas de razonamiento con alto nivel de abstracción. Suscitar esto en el lector es importante ya que algunas demostraciones inducen algoritmos que se emplean en la TR. De igual forma, se ha prescindido del uso de conceptos matemáticos demasiado generales para que, por ejemplo, quien desconozca el álgebra moderna aún sea capaz de descifrar la idea matemática. Así, aunque ha habido pérdidas de aspectos deseables al descontar la generalidad y abstracción, con ello el escrito ha ganado claridad.

Los códigos computacionales con los cuales se realiza el tratamiento y la visualización de los datos, así como el código donde se encuentran los módulos privativos a este trabajo, se encuentran en el apéndice C, y se escribieron en Python 3.5.3. Al igual que las demostraciones, se intenta que los códigos sean más explícitos, es decir, se evita la compresión de procesos que pueden enturbiar el entendimiento de lo realizado. Por último, los datos de México se encuentran de igual forma en el apéndice C.

0. INTUICIÓN GENERAL DE LA TEORÍA DE LA REALIZACIÓN

En principio hay que considerar el concepto de sistema, clave para la TR. De manera intuitiva, se puede decir que un sistema es un conjunto de elementos que interactúan entre ellos de manera más o menos permanente para la consecución de un fin.

La *Teoría de la Realización* (TR) utiliza información resumida de un sistema,^{II} denominada *descripción externa* (DE), para generar información sobre la interacción de sus elementos, a la que llamaremos *descripción interna* (DI), e incluso permite determinar la igualdad entre DE y DI. Para comprenderlo se tomará el sistema de aquellos elementos económicos, sociales, culturales y psicológicos que interactúan de forma más o menos sostenida con el fin de que a cada variación en el nivel de ingreso disponible Y_d exista una variación en el nivel de consumo C . La teoría económica dice que la propensión marginal al consumo c relaciona ambas variables, y si se considera que este sistema se activa en cada tiempo t , se obtiene la siguiente igualdad

$$C_t = c_t (Y_d)_t \quad (1)$$

Esta ecuación representa externamente al sistema en el sentido de que c_t relaciona la entrada $(Y_d)_t$ con la salida C_t , sin mostrar las interacciones de los elementos del sistema; de este

^{II} La información es arrojada por el sistema como resultado de las interacciones de sus elementos, y de manera directa no ofrece un conocimiento sobre estas.

modo sintetiza la información del sistema. A partir de esto es posible decir de forma explícita que la DE o información resumida que toma la TR para generar la DI es la sucesión de elementos c_t .

En la presente investigación, los sistemas considerados cuentan con cualidades particulares: linealidad, invarianza temporal, finitud, etcétera, que serán detalladas en el siguiente capítulo y en el apéndice B. Estas cualidades harán que la DI del sistema consista de tres matrices: H , F y G , las cuales no varían al pasar el tiempo y donde la matriz F engloba las variables de espacio de estado, esto es, medidas que identifican y sintetizan las interacciones entre elementos del sistema.

Además, dichas cualidades hacen que la igualdad (1) esté dada por

$$C_t = \begin{array}{|c|} \hline H \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline F^{t-1} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline G \\ \hline \end{array} \quad (2)$$

Para llegar de la DE a la DI garantizando la igualdad (2), se parte de acomodar los elementos c_t en la siguiente matriz, denominada *matriz de Hankel* (MH),

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_m & c_{m+1} & \dots & c_{n+m-1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

donde hay que probar que el rango de (4), es decir k , es igual al rango de las siguientes matrices,

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_m & c_{m+1} & \dots & c_{n+m-1} \\ c_{m+1} & c_{(m+1)+1} & \dots & c_{(n+m-1)+1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n & \dots & c_{n+j} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} & \dots & c_{n+1+j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_m & c_{m+1} & \dots & c_{n+m-1} & \dots & c_{n+m-1+j} \\ c_{m+1} & c_{(m+1)+1} & \dots & c_{(n+m-1)+1} & \dots & c_{(n+m-1+j)+1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Es decir, el rango de la matriz que se obtiene al aumentar una columna a (3) y el rango de la matriz que se obtiene al aumentar una fila y j columnas a (3) deben ser iguales al de (3).

Luego, a partir de (5) se genera una matriz triangular inferior P y una matriz Q que únicamente tiene sus primeras k filas no nulas (recordemos que k es el rango de (4) y (3)), y donde PQ iguala a (3). Posteriormente, a partir de elementos de P y Q se obtienen las matrices F , G y H . Los procesos para obtener P , Q , F , G y H se explican en los siguientes capítulos y en los apéndices, sin embargo, mencionarlo ahora únicamente tiene la finalidad de que el lector conozca los pasos del proceso.

Ahora, suponiendo que los valores de c_t son^{III}

t	1	2	3	4	5
c_t	0.125	0.125	0.25	0.375	0.625

entonces la condición asociada a (3), (4) y (5) se cumple por las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0.125 & 0.125 \\ 0.125 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.125 & 0.125 & 0.25 \\ 0.125 & 0.25 & 0.375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.125 & 0.125 & 0.25 \\ 0.125 & 0.25 & 0.25 \\ 0.375 & 0.375 & 0.625 \end{pmatrix} \quad (6)$$

^{III} Los valores habituales de c_t varían según las economías entre 0.5 y 0.85. Sin embargo, los valores que aquí se emplean no reflejan este aspecto de la evidencia empírica. Únicamente son ilustrativos, se usan para facilitar la comprensión sobre la TR. El caso no lineal es tratado por el mismo método que para el caso con ruido en los datos; por lo mismo, al tratar uno, se estará tratando el otro.

ya que la primera matriz tiene sus dos columnas linealmente independientes, la segunda matriz tiene su tercera columna como la suma de las dos primeras y la tercera matriz también tiene sus dos columnas linealmente independientes y la última es la suma de ambas.

A partir de (6), como se mencionó antes, se construyen las matrices P , Q , F , G y H . En este capítulo solo se mostrarán las tres últimas. A partir de su multiplicación se podrá observar cómo generan cada uno de los elementos de la sucesión. Por otra parte, como cada C_t se puede ver como una matriz de orden 1 por 1, entonces el formato para matrices de cualquier orden se puede seguir de este con facilidad, incluso la interpretación, en este caso, es más sencilla que en casos de matrices más generales, lo cual permite apoyar el proceso de interpretación de los resultados de aplicar la TR en el caso insumo-producto.

Las matrices F , G y H o DI son las siguientes

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0.125 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

y con ellas se puede ver que

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.125 = HG = HF^{1-1} G \\ c_2 &= 0.125 = HFG = HF^{2-1} G \\ c_3 &= 0.25 = HF^2G = HF^{3-1} G \\ c_4 &= 0.375 = HF^3G = HF^{4-1} G \\ c_5 &= 0.625 = HF^4G = HF^{5-1} G \end{aligned}$$

Esta DI del sistema brinda una posibilidad de pronóstico de la propensión marginal al consumo para valores de $t > 5$.

Por otro lado, la DE finita podría no satisfacer las condiciones (3), (4) y (5). Dos causas pueden ser el ruido en los datos o que el sistema es no lineal. En estas situaciones, el método que se propone agregará un proceso más para poder afrontar estos tipos de sistema. Este proceso se aplica a la MH y es parecido al de reducción de dimensiones del modelo de estadística multivariante llamado *componentes principales*.

El modelo de componentes principales consiste en descomponer la matriz de varianzas y covarianzas de un modelo estadístico multivariante en tres matrices. Una de ellas es una matriz diagonal que tiene ordenados en su diagonal principal los valores singulares de la matriz de varianzas y covarianzas. Estos valores singulares corresponden a la cantidad de varianza absorbida por nuevas variables o dimensiones, las cuales también son generadas por el propio método. Si a esa matriz diagonal se le retiran columnas desde la derecha, se irán quitando los valores singulares más pequeños, y si se acomoda el orden de las dos matrices restantes para que se puedan multiplicar por esta nueva matriz diagonal reducida y, que a su vez, la matriz que resulte de su multiplicación mantenga el orden de la matriz de varianzas y covarianzas, entonces se tendría una matriz de varianzas y covarianzas aproximada a la matriz de varianzas y covarianzas original (una explicación asequible del método de componentes principales se puede hallar en Hair *et al.* [1999]).

Para el método de componentes principales, esta reducción en valores singulares tiene el objetivo de obtener un modelo con una cantidad de nuevas dimensiones menor que el original y que no pierda mucha información. Por otro lado, si bien este proceso se emplea en este trabajo para que la TR pueda enfrentar sistemas con ruido o no lineales, la interpretación es diferente. Al retirar los valores singulares, lo que se hace es eliminar el ruido de los datos o ajustar la aproximación lineal para tener una estimación del sistema subyacente sin ruido y una aproximación lineal al sistema no lineal, lo cual permite generar una DI estimada para aproximar la DE real. Otra diferencia es que, en el caso de la TR, su uso no brinda una única opción, sino varias. Como se verá más adelante, quitar pocos o muchos valores singulares no necesariamente significa mejorar el ajuste de la DI con respecto a la DE, es decir, no hay un criterio claro sobre cuántos valores singulares quitar, ni siquiera sobre el orden al retirarlos.

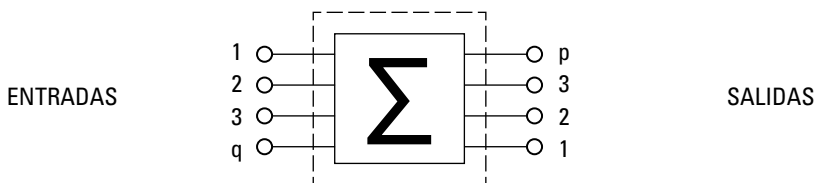
Todo lo mencionado sobre el método de reducción de ruido o ajuste lineal de un sistema no lineal será explicado con mayor detalle en la segunda sección del capítulo 2; su mención aquí solo tiene el fin de hacer más asequible lo que se realizará, así como dar una mejor idea de su uso al mostrar la semejanza que tiene con respecto al método de componentes principales. Por último, cabe mencionar que en el siguiente capítulo se detallará la TR en el caso de una DE infinita y sin ruido, y a partir de ella se regresará al caso finito y estocástico en el capítulo 2.

1. REALIZACIÓN MÍNIMA DE SUCESIONES INFINITAS

En este capítulo se explicará la *Teoría de la Realización* (TR), el tipo específico de sistema dinámico Σ a emplear y la sucesión infinita generada por tal sistema, sobre la cual se aplica la TR. La formalización del concepto de sistema dinámico y de sus propiedades aquí expuestas puede consultarse en la sección A.2 del apéndice A.

Partiendo de la idea intuitiva de sistema del capítulo anterior, se dice que un sistema Σ es discreto cuando el tiempo T en el que transcurre su actividad toma valores $0, 1, 2, 3, \dots$, es decir, este sistema que se activa a “saltos” tiene por conjunto T a los enteros no negativos $T = \mathbb{Z}^+$. Además, si el sistema puede recibir q entradas numéricas, así como generar p respuestas, se dice que es un sistema multientrada y multisalida. Un sistema Σ que sea discreto, *multientrada* y *multisalida* se designa como DM, y su representación puede verse en el diagrama 1.1.

Diagrama 1.1. Sistema dinámico discreto multientrada multisalida



Fuente: tomado de Casti [1987: 2].

Cada una de las multientradas del sistema será acomodada en un vector del espacio vectorial R^q (ver definición A.1), mientras que cada multisalida en un vector del espacio vectorial R^p . Ahora, se dice que U es el conjunto de entradas y Y el conjunto de salidas del sistema, siempre que sean subespacios vectoriales^{IV} de R^q y R^p y contengan a todas las multientradas y todas las multisalidas, respectivamente.

El sistema recibe una señal y arroja un resultado en cada tiempo $k \in T$, sin embargo, esta secuencia de entradas puede no ser admisible, es decir, el sistema tal vez no sea capaz de procesar esa entrada y convertirla en una salida;^V incluso, la sucesión de salidas quizá no sea alcanzada por el sistema.^{VI} Esta restricción se modela mediante las funciones $\bar{u}(k)$, $\bar{u}: Z^{+0} \rightarrow U$ e $\bar{y}(k)$, $\bar{y}: Z^{+0} \rightarrow Y$, las cuales serán la *función de entrada admisible* [Casti, 1987] o *función de control* [Hinrichsen y Pritchard, 2005] y la *función de salida* [Casti, 1987], respectivamente. Al conjunto de funciones de entrada se designa Ω , y al de funciones legibles de salida Γ . En lo que sigue, por simplicidad y sin que exista confusión, a la multientrada y multisalida solo se les denomina entrada y salida, de manera correspondiente. Asimismo, se asumirá como entrada la función de entrada admisible.

Dentro de las posibilidades existen sistemas en los cuales es imposible entrever directamente su actividad interna o, lo que es lo mismo, no se puede determinar de forma directa el patrón temporal con el cual transmutan $\bar{u}(k)$ en $\bar{y}(k)$. Sin embargo, la TR tiene la facultad de brindar un método para

^{IV} Un subespacio vectorial es un subconjunto de un espacio vectorial que garantiza las propiedades de espacio vectorial.

^V Por ejemplo, si se tienen baterías con carga muy baja y se colocan en un aparato, este no realizará ninguna acción, ya que el estímulo eléctrico no es suficiente para activarlo.

^{VI} Por ejemplo, si se quiere que un auto alcance una gran velocidad, pero su manufactura lo impide, por más que se pise el acelerador y se cambie la posición de la palanca de velocidades, no se podrá obtener tal velocidad, el sistema auto no puede alcanzar esa velocidad, esa salida.

acercarse a dicha pauta. Esto se consigue mediante el empleo de la *descripción externa* (DE) del sistema, entender su relación con la *descripción interna* (DI), y aprender a construir la *realización de espacio de estado mínimo* (REEM).

Al inicio se construyó la idea de la DE de un sistema MD, y de forma paulatina se agregaron características al sistema para definir el formato final de la DE. Si se concibe el sistema como un agente que decide llevar a cabo la producción de cierta cantidad de bienes durante varios periodos. Se puede pensar que formula un plan de producción α donde indica cuándo iniciar la producción, bajo cuáles condiciones partir, el número de bienes a elaborar, la cantidad de insumos y el método de fabricación. Así descrito, el plan se puede modelar como una función, $\omega_\alpha(k, \bar{u}(k))$, $\omega_\alpha : T \times \Omega \rightarrow Y$, donde $\bar{u}(\cdot)$ fija la cantidad de insumos (entrada) en cada periodo, $\omega_\alpha(\cdot; \cdot)$ representa el método de producción empleado en cada momento a partir de un tiempo inicial $\tau \in T$ y, dadas ciertas condiciones iniciales, $\omega_\alpha(k, \bar{u}(k)) = \bar{y}(k)$ asigna la cuantía de bienes producidos (salida) en cada etapa y bajo una magnitud dada de insumos, y α es un valor asociado con el tiempo $\tau \in T$ de inicio del proceso productivo.

A la expresión ω_α se le nombra DE o función de entrada-salida. Además, como el sujeto puede tener más planes de producción vinculados con distintos tiempos de comienzo de la producción y condiciones iniciales, es posible agrupar a todos en el conjunto F , indexando cada uno con los elementos α, β, γ , etcétera, de un cierto conjunto A . Este conjunto F se llama familia de funciones de entrada-salida indexadas por el conjunto A , y si el sujeto (sistema) cuenta con estas alternativas se dice que está descrito de forma externa.^{VII}

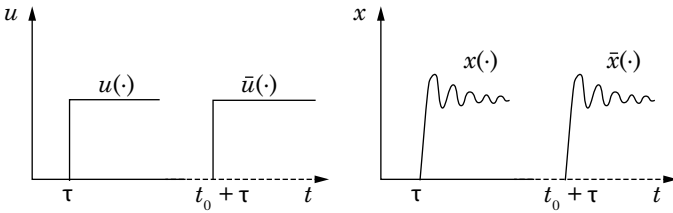
Ahora, si el sistema es tiempo invariante [Casti, 1987: 24], es decir, si el sistema tiene una misma salida bajo una misma entrada en dos tiempos distintos: en un tiempo inicial τ y en

^{VII} La formalización del concepto puede consultarse en Casti [1987: 27].

otro tiempo que es un corrimiento de τ en t_0 unidades (diagrama 1.2), entonces la DE del sistema no depende del tiempo en que inicia; por lo mismo, se puede retirar su dependencia a α , quedando

$$\bar{y}(k) = \omega(k, \bar{u}(k)) \quad (1)$$

Diagrama 1.2. Invarianza temporal de un sistema



Fuente: tomado de Hinrichsen y Pritchard [2005: 89].

Es más, incorporando al sistema la cualidad de ser lineal [Casti, 1987: 25], la DE adquiere su forma final; se vuelve una transformación lineal con respecto a Ω . Una consecuencia de que $\omega(k, \cdot)$ sea una transformación lineal en cada tiempo, es que ahora se puede representar como una matriz del espacio vectorial de matrices de orden p por q , $M_{p \times q}$, es decir $W(k) \in M_{p \times q}$, con $k \in T$, y por ello (1) se puede reescribir como

$$\bar{y}(k) = W(k)\bar{u}(k) \quad (2)$$

Al sistema que genera esta forma de DE, es decir, al sistema DM, invariante temporal y lineal se le denomina como DMIL.

Una vez conseguida la configuración final de la DE, se construye la noción de DI del sistema. Imagínense las interacciones entre máquinas y trabajadores, determinadas por las habilidades de estos últimos, el tipo de máquinas, el orden del flujo de los procesos productivos, etcétera. Una vez que entran los insumos a la producción, que incluyen el energético, el beneficio que el trabajador percibe lo lleva a activar las

interacciones con otros trabajadores y con las máquinas bajo un cierto orden. Para saber cómo procede y transforma este orden el insumo en producto, podría pensarse que se debe vigilar de manera minuciosa todo el proceso, sin embargo, tan solo con conocer algunas interacciones se podría conocer el estado global del proceso de producción. Esto conduce a la sentencia siguiente: la interacción de unos cuantos trabadores y máquinas congrega la información suficiente para determinar todo el proceso interno y el resultado de la producción.

Para un sistema DMIL, al igual que en el ejemplo anterior, es factible asumir que existen s partes internas que congregan toda la información cuantitativa necesaria para determinar su desenvolvimiento interno y su salida. A estas se les denomina *variables de estado* (VE), y al vector $\bar{x} \in R^s$, en cuyas coordenadas se acomoda la información cuantitativa de cada una de ellas, se le conocerá como *estado del sistema* (ES).^{VIII} Cabe aclarar que el ES es una cantidad proverbialmente no medible de forma directa, y las variables de estado no son necesariamente cantidades físicas [Hinrichsen y Pritchard, 2005: 76]; para la TR los únicos elementos con sentido físico son las entradas y las salidas [Casti, 1987: 3].

Dicho lo anterior, es posible afirmar que al conjunto de todos los estados $X \subseteq R^s$ que puede alcanzar un sistema se le llama *espacio de estado* (EE), y se supondrá que tiene una estructura de espacio vectorial.^{IX} Si la dimensión de X es finita, se declara que el sistema DMIL es finito. Este tipo de sistemas se nombraran como DMILF, y su dimensión variará en tanto se elijan distintas cantidades de VE, pues no son únicas y existe la posibilidad de pasar de unas a otras [Rowell, 2002a: 2]. Cuando se elija la menor cantidad de ellas se afirmará que X tiene dimensión mínima.

^{VIII} Para una interpretación más formal de los conceptos de VE y ES se sugiere leer a Chen [1984]. Para mejorar la interpretación de los conceptos, se sugiere consultar a Bay [1999: 13] y Rowell [2002a: 1].

^{IX} Definición A.1.

Ahora, suponiendo que el ES de un sistema DMILF en el tiempo $k+1$, $\bar{x}(k+1)$ es afectado por

- (i) La dinámica interna en el periodo inicial, es decir, por el ES en τ , $\bar{x}(\tau)$, y
- (ii) El efecto de la entrada del tiempo anterior, $\bar{u}(k)$

Entonces, mediante la función de estado, $\varphi: T \times T \times X \times U \rightarrow X$, y la función salida, $\eta: T \times X \rightarrow Y$ [Casti, 1987], se define la descripción de estado (DES)

$$\begin{aligned}\bar{x}(k+1) &= \varphi(k+1, \tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(k)) \\ \bar{y}(k) &= \eta(k, \bar{x}(k))\end{aligned}\tag{3}$$

para todo $k \in T$, $\tau \leq k$,^X en donde la primera es la ecuación de estado y la segunda la ecuación de salida [Antsaklis y Michel, 2007: 48]. Además, por la propiedad (iv) (c) de la definición A.20,

$$\begin{aligned}\varphi(k+1, \tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(k)) &= \varphi(k+1, k, \varphi(k, \tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(k-1)), \bar{u}(k)) \\ &= \varphi(k+1, k, \bar{x}(k), \bar{u}(k))\end{aligned}$$

Y como φ y η son autónomas del tiempo porque el sistema es invariante,^{XI} entonces

$$\begin{aligned}\bar{x}(k+1) &= \varphi(\bar{x}(\tau), \bar{u}(k)) \\ \bar{y}(k) &= \eta(\bar{x}(k))\end{aligned}\tag{4}$$

^X Está condición implica que esté bien definida la función de estado [Casti, 1987: 22], además de garantizar la unicidad de la solución de (3) [Antsaklis y Michel, 2007: 51].

^{XI} η es autónoma por la definición de sistema constante de Casti [1987: 24], de manera específica de su inciso (iv). Por su parte, debido al punto (iii) de la definición antedicha, φ es independiente del tiempo y a cada valor que tenga en un tiempo puede alcanzarse en cualquier otro.

Como consecuencia de que el sistema también sea lineal, $\varphi(\bar{x}(\tau), \bar{u}(k))$ y $\eta(\bar{x}(k))$ son transformaciones lineales [Casti, 1987: 25], por lo cual es factible asociar a ellas de forma biunívoca las matrices $F \in M_{s \times s}$, $G \in M_{s \times p}$ y $H \in M_{q \times s}$, respectivamente, de tal manera que las ecuaciones en (4) se reescriban como

$$\begin{aligned}\bar{x}(k+1) &= F\bar{x}(k) + G\bar{u}(k) \\ \bar{y}(k) &= H\bar{x}(k)\end{aligned}\tag{5}$$

A la terna de matrices (F, G, H) que garantizan (5) $\forall k \in T$ se le llama la DI del sistema y, además, si se dispone de minimalidad en X , la DI será mínima.

Luego, para revelar el nexo entre DI y DE se busca la solución de (5) para un tipo particular de entradas. Tomando un tiempo $k \in T$ positivo arbitrario pero fijo, entonces

$$\begin{aligned}\bar{x}(k) &= F\bar{x}(k-1) + G\bar{u}(k-1) \\ \bar{y}(k) &= H\bar{x}(k)\end{aligned}\tag{6}$$

Al emplear la primera ecuación de (6), tomando como estado inicial $\bar{x}(0) = \bar{0}$ se generan las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\bar{x}(1) &= F\bar{x}(0) + G\bar{u}(0) = G\bar{u}(0) \\ \bar{x}(2) &= F\bar{x}(1) + G\bar{u}(1) = FG\bar{u}(0) + G\bar{u}(1) \\ \bar{x}(3) &= F\bar{x}(2) + G\bar{u}(2) = F(FG\bar{u}(0) + G\bar{u}(1)) + G\bar{u}(2) \\ &= F^2G\bar{u}(0) + FG\bar{u}(1) + G\bar{u}(2) \\ \bar{x}(4) &= F\bar{x}(3) + G\bar{u}(3) = F(F^2G\bar{u}(0) + FG\bar{u}(1) + G\bar{u}(2)) + G\bar{u}(3) \\ &= F^3G\bar{u}(0) + F^2G\bar{u}(1) + FG\bar{u}(2) + G\bar{u}(3) \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \bar{x}(k) &= F\bar{x}(k-1) + G\bar{u}(k-1) = F^{k-1}G\bar{u}(0) + F^{k-2}G\bar{u}(1) + \dots + FG\bar{u}(k-2) + G\bar{u}(k-1)\end{aligned}$$

Ahora, al sustituir $\bar{x}(t)$ en la segunda ecuación de (6) resulta

$$\begin{aligned}\bar{y}(k) &= H \left(F^{k-1}G\bar{u}(0) + F^{k-2}G\bar{u}(1) + \dots + FG\bar{u}(k-2) + G\bar{u}(k-1) \right) \\ &= HF^{k-1}G\bar{u}(0) + HF^{k-2}G\bar{u}(1) + \dots + HFG\bar{u}(k-2) + HG\bar{u}(k-1) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} HF^{k-(i+1)}G\bar{u}(i)\end{aligned}\quad (7)$$

donde a $C(n-k) = HF^{n-(k+1)}G$ se denomina matriz de respuesta al impulso unitario de tiempo discreto [Antsaklis y Michel, 2007: 72]. Para enlazar la DE y DI se emplea la siguiente función de entrada^{XII} dada por

$$\bar{y}_i(j) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta(j)_i + \delta(j-k)_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\delta(l) = \begin{cases} 1 & \text{si } l = 0 \\ 0 & \text{si } l \neq 0 \end{cases}$ en una coordenada cualquiera, pero fija i de $\bar{y}_i(k)$ y para todo en $0 \leq j \leq k$ y al sustituir en (7), entonces se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{y}(k) &= \sum_{r=0}^{k-1} HF^{(k-1)-r}G\bar{y}_i(r) \\ &= HF^{k-1}G\bar{y}_i(0) \\ &= HF^{k-1}G_{:,i}\end{aligned}\quad (8)$$

Luego, al considerar la misma función de entrada $\bar{y}_i(k)$ para la DE (2), se tendría que la función de salida está dada por

$$\begin{aligned}\bar{y}(k) &= G(k)\bar{y}_{i,t}(k) \\ &= G(k)_{:,i}\end{aligned}\quad (9)$$

^{XII} La cual se define en el cuarto párrafo del capítulo 1.

Por consiguiente, al comparar las ecuaciones en (8) y (9), se sigue que $G(k)_{:,i} = HF^{k-1}G_{:,i}$. Y debido a que i es arbitrario, entonces

$$G(k) = HF^{k-1}G, \forall k \in T \quad (10)$$

Haciendo patente el vínculo entre DE y DI, y motivando la siguiente definición.

Definición 1.1 (realización en espacio de estado mínimo). Sea Z_T una sucesión de matrices en $M_{p \times q}$ que es la DE de un Σ DMILF, y sean $F \in R^{r \times r}$, $G \in R^{r \times q}$ y $H \in R^{p \times r}$ matrices. Se dice que la terna de matrices (F, G, H) es una realización de dimensión r de un sistema DMILF, a la cual se denomina DI, siempre y cuando

$$\{Z(k)\}_{k \in T} = \{HF^{k-1}G\}_{k \in T}$$

Con $Z(k)$ elemento de Z_T . Si cada DI del sistema DMILF tiene una dimensión mayor o igual a r , entonces se dice que (F, G, H) es una realización de espacio mínima y se le llama DI mínima.

Una vez relacionadas la DE y la DI mínima, se encauza el esfuerzo hacia el tema de la realización en espacio de estado mínimo (REEM), es decir, como construir la DI mediante la DE de un sistema DMILF. Para generar esta DI mínima se utilizó un concepto matemático que se presenta mediante la siguiente definición.

Definición 1.2 (matriz de Hankel). Sea Z_T una sucesión de matrices en $M_{p \times q}$. La matriz de Hankel (MH) de dimensión $np \times mq$, correspondiente a Z_T , se define como

$$H_{n,m}(L_N) = \begin{pmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,2} & \cdots & Z_{1,m} \\ Z_{2,1} & Z_{2,2} & \cdots & Z_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n,1} & Z_{n,2} & \cdots & Z_{n,m} \end{pmatrix}$$

donde $Z_{i,j}$ es el elemento $Z(i+j-1) \in M_{p \times q}$ de Z_T , $\forall (i,j) \in N_n \times N_m$. Debido a esta propiedad, los bloques antidiagonales de la MH

son conformados por las mismas matrices de la sucesión, es decir, $Z_{i,j} = Z(i+j-1) = Z((i-1)+(j+1)-1) = Z_{i-1,j+1}$, con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m-1$. Por otro lado, cuando no exista confusión sobre a qué sucesión alude la MH, o bien, si el uso del concepto no requiere mencionar abiertamente la sucesión a la cual está asociada, entonces se usará simplemente $H_{n,m}$.

Se recomienda inspeccionar otra forma de enunciar la MH, la cual puede hallarse en la definición A.24. Esto con el fin de descifrar la demostración realizada de la condición de necesidad del teorema A.15 (a), ya que ella es en sí el algoritmo empleado a continuación para generar la DI mínima.

A continuación se define un sistema DMILF de forma externa para aplicar la REEM, lo cual facilitará afianzar conceptos y procesos. Supóngase que dicho sistema en forma externa recibe entradas desde $U \subset R^2$ y genera salidas en $Y \subset R$ como se muestra a continuación

$$\bar{y}(k) = A(k)\bar{u}(k)$$

donde su DE está dada $A(k) : T \rightarrow M_{1 \times 2}$ definida como

$$\begin{aligned} A(1) &= (a_{11}(1), a_{12}(1)) = (1, 1) \\ A(2) &= (a_{11}(2), a_{12}(2)) = (3, 1) \\ &\vdots \\ A(k) &= (a_{11}(k), a_{12}(k)) = \left(\sum_{j=1}^k j, \sum_{\substack{j=1 \\ k>2}}^2 a_{12}(k-j) \right) \end{aligned}$$

Es decir,

$$A(k) = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^k j, 1 \right) & \text{si } k = 1, 2 \\ \left(\sum_{j=1}^k j, \sum_{i=1}^2 a_{12}(k-i) \right) & \text{si } k > 2 \end{cases}$$

Ahora bien, según lo dicho en la prueba del teorema A.15, hay que determinar los valores α , β y n , tales que el rango $(H_{\beta+i, \alpha+j}(\{A(k)\}_{k \in T})) = n, \forall (i, j) \in \{0,1\} \times Z^{+0}$. El método de apoyo para la búsqueda se puede ver en el siguiente algoritmo.

Algoritmo 1.

1. Postular valores tentativos de α y β
2. Comprobar si $\text{rango}(H_{\beta, \alpha}) = \text{rango}(H_{\beta+1, \alpha}) = n$
3. Constatar que para $j \in Z^{+0}$ suficientemente alto se garantice que $\text{rango}(H_{\beta+1, \alpha+j}) = n$
 Los dos casos posibles son:
 - 3.1. Si la condición se cumple, entonces paso a 4
 - 3.2. Si la condición no se cumple, entonces regreso al paso 1
4. Demostrar que para α , β y n , y para toda $j \in N$, se mantiene la condición: $\text{rango}(H_{\beta+1, \alpha+j}) = n$

Frente a este proceso, un sistema que no sea finito no admite la demostración del paso 4; además, para un sistema finito puede ser difícil llevar a cabo esta demostración. Un ejemplo del caso de la no finitud es cuando se considera el sistema teórico que tiene por DE a los números primos, el cual no admite REEM [Casti, 1987] y, por tanto, no posibilita el paso 4. Por otro lado, buscar soluciones generales para sortear dificultades en el paso 4 cuando el sistema sea finito es algo que no atañe a los objetivos del presente trabajo.^{XIII}

Dentro del marco anterior, se postula lo más simple: $\alpha=\beta=1$, así se tienen las siguientes MH:

$$H_{\beta, \alpha} = (1 \quad \mathbf{1}) \quad H_{\beta+1, \alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} \\ 3 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

^{XIII} El paso 4 solo tiene dentro de los objetivos de la investigación un semblante ilustrativo, de apoyo al entendimiento del proceso de la REEM de un tipo particular de DE y de algunos de sus dilemas implícitos.

donde es claro que la suposición es errónea, ya que el rango $(H_{\beta,\alpha}) = 1 \neq 2 = \text{rango}(H_{\beta+1,\alpha})$. Ahora, postulando $\beta = 5$ y $\alpha = 3$, se tienen las siguientes matrices:

$$H_{5,3} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 3 & \boxed{1} & 6 & \boxed{2} \\ 3 & \boxed{1} & 6 & \boxed{2} & 10 & \boxed{3} \\ 6 & \boxed{2} & 10 & \boxed{3} & 15 & \boxed{5} \\ 10 & \boxed{3} & 15 & \boxed{5} & 21 & \boxed{8} \\ 15 & \boxed{5} & 21 & \boxed{8} & 28 & \boxed{13} \end{pmatrix} \quad H_{6,3} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 3 & \boxed{1} & 6 & \boxed{2} \\ 3 & \boxed{1} & 6 & \boxed{2} & 10 & \boxed{3} \\ 6 & \boxed{2} & 10 & \boxed{3} & 15 & \boxed{5} \\ 10 & \boxed{3} & 15 & \boxed{5} & 21 & \boxed{8} \\ 15 & \boxed{5} & 21 & \boxed{8} & 28 & \boxed{13} \\ 21 & \boxed{8} & 28 & \boxed{13} & 36 & \boxed{21} \end{pmatrix} \quad (11)$$

donde no es nada recóndito notar que el rango del par de matrices es el mismo $n = 5$, y tanto las cinco primeras filas como las cinco primeras columnas son independientes, en ambas matrices.

Para comprobar el paso 3, hay que cerciorarse de que el rango de $H_{6,3+j}$ sea igual a 5 para $j \in \mathbb{Z}^{+0}$ suficientemente alto. Sin embargo, en vez de comprobar esto, se verifica una sentencia equivalente. Primero habrá que notar las marcas grises colocadas en las columnas pares de las matrices en 11. Ellas señalan que, al tomar tres columnas pares consecutivas, la suma de las dos primeras iguala a la última. En varias situaciones esto no podría extenderse a $H_{6,3+j}$, $\forall j \in \mathbb{Z}^{+0}$, pero en este caso sí.^{XIV} A partir de esto, es elemental probar que las dos primeras columnas grises de $H_{6,3}$ son una base (definición A.5) del espacio vectorial de las columnas pares de $H_{6,3+j}$, $\forall j \in \mathbb{Z}^{+0}$.

Por la característica mencionada, la sentencia equivalente es determinar si las tres primeras columnas impares de $H_{6,3}$ (sin tono gris) son una base del espacio vectorial de columnas impares de $H_{6,3+j}$, para $j \in \mathbb{Z}^{+0}$ suficientemente alto.^{XV} Para esta

^{XIV} La demostración de este hecho es relativamente simple considerando que $\alpha_{12}(k)$ es el elemento k -ésimo de la sucesión de Fibonacci. Se dejan los detalles de la demostración en manos de la persona interesada.

^{XV} De cumplirse esto, dado que las primeras dos columnas en tono gris de $H_{6,3}$ son base del espacio de columnas impares de $H_{6,3+j}$, $\forall j \in \mathbb{Z}^{+0}$, entonces las cinco primeras columnas de $H_{6,3}$ son una base del espacio de columnas de $H_{6,3+j}$, para $j \in \mathbb{Z}^{+0}$, suficientemente alto. Así el rango de $H_{6,3+j}$ para el $j \in \mathbb{Z}^{+0}$ suficientemente alto es 5.

confirmación se emplea el código C.2 tomando como $j \in Z^{+0}$ suficientemente alto a $j = 1\ 000\ 000$. El código arroja que el rango de $H_{6,3+j}$ es igual a 5. Por consiguiente, la evidencia computacional sobre el rango de $H_{6,3+j}$ termina por satisfacer el paso 3.

Ahora solo resta confirmar el paso 4, es decir, pasar de la evidencia computacional a una demostración sobre la dimensión. Para esto solo basta demostrar que las tres columnas impares de $H_{6,3}$ son base del espacio de columnas impares de $H_{6,3+j}$, $\forall j \in Z^{+0}$. Pero esto es cierto y su demostración elemental, por lo que se deja en manos de la persona inetresada.^{XVI} Es así que se asegura que $\beta = 5$, $\alpha = 3$ y $n = 5$ verifican la condición del paso 4, por tanto, puede continuarse con la siguiente parte del algoritmo de la REEM.

La parte (II) en la demostración del teorema A.15 (a) es confeccionar las matrices Λ_α y Λ_α^* . La primera está constituida por las cinco primeras filas independientes de $H_{5,3}$, mientras que la segunda lo está por las cinco filas que se encuentran μ posiciones debajo de las cinco primeras filas independientes de $H_{6,3}$, donde μ es el número de filas de los elementos de $\{A(k)\}_{k \in N}$, es decir, $\mu = 1$, así:

$$\Lambda_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 10 & 3 \\ 6 & 2 & 10 & 3 & 15 & 5 \\ 10 & 3 & 15 & 5 & 21 & 8 \\ 15 & 5 & 21 & 8 & 28 & 13 \end{pmatrix} \quad \Lambda_\alpha^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 & 10 & 3 \\ 6 & 2 & 10 & 3 & 15 & 5 \\ 10 & 3 & 15 & 5 & 21 & 8 \\ 15 & 5 & 21 & 8 & 28 & 13 \\ 21 & 8 & 28 & 13 & 36 & 21 \end{pmatrix}$$

El siguiente peldaño, el (III), en el algoritmo es construir cuatro matrices a partir de Λ_α , Λ_α^* y $H_{1,3}$: la matriz M de orden 5

^{XVI} Se sugiere utilizar la proposición A.7 que ha sido planteada y probada. En ella se postulan tres escalares 1, -3 y 3, obtenidos gracias al ejercicio computacional, y se demostró que para cualesquiera cuatro elementos consecutivos $a_{11}(k)$, $a_{11}(k+1)$, $a_{11}(k+2)$ y $a_{11}(k+3)$, el cuarto es combinación lineal de los primeros tres con los coeficientes 1, -3 y 3. Esto hace que las tres primeras columnas no grises de $H_{6,3}$, dado que son independientes, sean una base del espacio de columnas impares de $H_{6,3+j}$, $\forall j \in Z^{+0}$.

originada por las cinco primeras columnas independientes de Λ_α ; la segunda es la matriz M^* de orden 5 que ocupa las columnas de Λ_α^* en las mismas posiciones que lo hace M en Λ_α ; la tercera es la matriz M_I de orden 1×3 que ocupa las columnas de $H_{1,3}$, en las mismas posiciones que lo hace M en Λ_α ; y la cuarta es la matriz M_2 de orden $5 \times m$ que ocupa las primeras m columnas de Λ_α , donde m es el número de columnas de cada matriz de RE, en este caso $m = 2$. Bajo estas especificaciones tenemos:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & 3 & \mathbf{1} & 6 \\ 3 & \mathbf{1} & 6 & \mathbf{2} & 10 \\ 6 & \mathbf{2} & 10 & \mathbf{3} & 15 \\ 10 & \mathbf{3} & 15 & \mathbf{5} & 21 \\ 15 & \mathbf{5} & 21 & \mathbf{8} & 28 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 3 & \mathbf{1} & 6 & \mathbf{2} & 10 \\ 6 & \mathbf{2} & 10 & \mathbf{3} & 15 \\ 10 & \mathbf{3} & 15 & \mathbf{5} & 21 \\ 15 & \mathbf{5} & 21 & \mathbf{8} & 28 \\ 21 & \mathbf{8} & 28 & \mathbf{13} & 36 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = (1 \ \mathbf{1} \ 3 \ \mathbf{1} \ 6) \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} \\ 3 & \mathbf{1} \\ 6 & \mathbf{2} \\ 10 & \mathbf{3} \\ 15 & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

La última maniobra en el algoritmo, la (IV), es definir la realización (F, G, H) de $\{A(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$, lo cual se logra al tomar $F = M^*M^{-1}$, $G = M_2$ y $H = M_1M^{-1}$, donde M^{-1} es la matriz inversa de M . Estas matrices avalan lo dicho en la definición 1.1, es decir,

$$\{HF^{k-1}G\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(A_{11}(k), A_{12}(k))\}_{k \in \mathbb{N}}$$

lo cual se puede atestiguar con mayor concreción, haciendo algunos cálculos. Finalmente, cabe aclarar que no existe unicidad en la RI mínima. Si bien es una aseveración válida la no unicidad, según la proposición 2.3 de Schutter [2000: 6] y el teorema 6.9 de Casti [1987: 133], si dos realizaciones mínimas corresponden al mismo sistema, ambas son equivalentes algebraicas (ver definición A.21), por lo cual $\bar{H}\bar{F}^t\bar{G} = (HT)(T^{-1}FT)^t(T^{-1}G) = HF^TG$, así que, obteniendo una realización mínima, las demás son realizaciones debidas a cambios coordinados mediante la matriz T no singular.

2. TEORÍA DE LA REALIZACIÓN: FINITUD Y ALEATORIEDAD

2.1. REALIZACIÓN MÍNIMA DE SUCESIONES FINITAS EN EXPANSIÓN

La TR ha podido sortear el asunto de realizar sucesiones de matrices finitas. La realización mínima en tal caso se denominará *realización parcial mínima* (RPM). El porte de tal proceso es lo que a continuación se explicará mediante un ejemplo, cimentado en los lemas, teoremas, definiciones y algoritmos computacionales encontrados en los apéndices A, B y C, por lo cual se exhorta a que no se soslayan.

Como preámbulo, se define la sucesión parcial que se utilizará adelante para ilustrar la RPM. Sea la sucesión parcial $G_{N_{11}}$ con elementos en $M_{2 \times 2}$ dados por:

$$\begin{aligned} g_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & g_2 &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & g_3 &= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} & g_4 &= \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \\ g_5 &= \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} & g_6 &= \begin{pmatrix} 21 & 8 \\ 8 & 21 \end{pmatrix} & g_7 &= \begin{pmatrix} 28 & 13 \\ 13 & 28 \end{pmatrix} & g_8 &= \begin{pmatrix} 36 & 21 \\ 21 & 36 \end{pmatrix} \\ g_9 &= \begin{pmatrix} 45 & 34 \\ 34 & 45 \end{pmatrix} & g_{10} &= \begin{pmatrix} 55 & 55 \\ 55 & 55 \end{pmatrix} & g_{11} &= \begin{pmatrix} 66 & 89 \\ 89 & 66 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, dado que el despliegue para formar la RPM se hará mediante la aplicación de lo dicho en el teorema B.4, entonces se ha de comprobar su hipótesis, es decir, se deben encontrar

$\alpha, \beta \in N$ mínimos, $\alpha \leq \psi$, es decir, $\psi \in N_{\alpha:\infty}$, y n , tales que $\beta + \psi = 11$ y

$$\text{rango}(H_{\beta,\alpha}) = \text{rango}(H_{\beta,\alpha+1}) = \text{rango}(H_{\beta+1,\psi}) = n$$

Para localizarlos es posible emplear el AF en la definición B.1. Tiene la ventaja computacional de que tal descomposición mejora la precisión en el cálculo del rango de la MH, lo cual es valioso cuando los valores de las matrices en la DE son pequeños o el número de matrices es muy grande, ya que el uso de las funciones usuales de cálculo del rango corrompe los valores, sobre o subdimensionándolos. El AF permite exponer $H_{r,s}$ como la multiplicación de dos matrices: una matriz triangular inferior en $R, P_{r,r} \in I_{t_{2r}}$, con diagonal principal de unos, y $Q_{r,s} \in M_{2r \times 2s}$,

$$\begin{aligned} H_{r,s} &= \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \cdots & g_{1,2s} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & \cdots & g_{2,2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{2r,1} & g_{2r,2} & \cdots & g_{2r,2s} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g(1) & g(2) & \cdots & g(s) \\ g(2) & g(3) & \cdots & g(s+1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g(r) & g(r+1) & \cdots & g(r+s+1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ p_{2,1} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ p_{2r,1} & p_{2r,2} & \cdots & p_{2r,2r-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,2s} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \cdots & q_{2,2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{2r,1} & q_{2r,2} & \cdots & q_{2r,2s} \end{pmatrix} \\ &= P_{r,r} Q_{r,s} \end{aligned}$$

y por la demostración del lema B.1, el rango $H_{r,s} = n$ si y solo si $Q_{r,s}$ tiene sus primeras n filas no nulas, es decir, el rango de la MH es igual al número de filas no nulas de $Q_{r,s}$. Sin embargo, en esta oportunidad no se utiliza. La precisión del código C.3 que se emplea para este ejercicio no se ve sensiblemente

alterada, y la mención se vuelve anecdótica, aunque con implicaciones prácticas importantes. Así, se pasa a dar el siguiente algoritmo.

Algoritmo 2 (determinación de α , β , ψ y n de $H_{\beta,\alpha}$).

1. Formar las matrices $H_{\beta,\alpha}$, $H_{\beta,\alpha+1}$, con β , $\alpha = 1$.
2. Obtener el rango de $H_{\beta,\alpha}$ y $H_{\beta,\alpha+1}$
 - 2.1 Si el rango de las matrices es igual, entonces se pasa al inciso 3;
 - 2.2 Si el rango de las matrices es distinto, entonces se define $\beta = \beta + 1$,^{XVII} y se pasa al inciso 1 aplicando este β .
3. Formar la matriz $H_{\beta,\alpha+1}$;
4. Obtener el rango de $H_{\beta,\alpha+1}$
 - 4.1 Si es igual al rango de $H_{\beta,\alpha}$, entonces se sigue al inciso 5;
 - 4.2 Si no es igual al rango de $H_{\beta,\alpha}$, entonces se define $\alpha = \alpha + 1$,^{XVIII} y se pasa al inciso 1.
5. Formar la matriz $H_{\beta+1,\psi}$
 - 5.1 Si $\beta + \alpha + 1 = 11$, entonces se define $\psi = \alpha$ y se concluye.
 - 5.2 Si $\beta + \alpha + 1 < 11$, entonces se define $\psi = 11 - (\beta + 1)$ y se pasa al inciso 6.
6. Obtener el rango de $H_{\beta+1,\psi}$
 - 6.1 Si el rango de $H_{\beta,\alpha}$ y $H_{\beta+1,\psi}$ es el mismo, entonces se toman los valores vigentes de β , α y ψ , y n igual al rango de $H_{\beta,\alpha}$, y se concluye.
 - 6.2 Si el rango de $H_{\beta,\alpha}$ y $H_{\beta+1,\psi}$ es distinto, entonces se define $\beta = \beta + 1$ ^{XIX} y se pasa al inciso 1.

Al ejecutar el código C.3, la primera línea obtenida comprueba que los valores son $\beta = 5$, $\alpha = 5$, $\psi = 6$ y $n = 10$. Con esto

^{XVII} Es decir, se redefine β tomando su valor inmediato anterior, sumándole 1.

^{XVIII} Es decir, se redefine α tomando su valor inmediato anterior, sumándole 1.

^{XIX} Es decir, se redefine β tomando su valor inmediato anterior, sumándole 1.

se obtienen todos los datos que son menester para cumplir la hipótesis del teorema B.4. La MH que se consigue es:

$$H_{6,6} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 & 2 & 10 & 3 & 15 & 5 & 21 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 6 & 3 & 10 & 5 & 15 & 8 & 21 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 10 & 3 & 15 & 5 & 21 & 8 & 28 & 13 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 3 & 10 & 5 & 15 & 8 & 21 & 13 & 28 \\ 6 & 2 & 10 & 3 & 15 & 5 & 21 & 8 & 28 & 13 & 36 & 21 \\ 2 & 6 & 3 & 10 & 5 & 15 & 8 & 21 & 13 & 28 & 21 & 36 \\ 10 & 3 & 15 & 5 & 21 & 8 & 28 & 13 & 36 & 21 & 45 & 34 \\ 3 & 10 & 5 & 15 & 8 & 21 & 13 & 28 & 21 & 36 & 34 & 45 \\ 15 & 5 & 21 & 8 & 28 & 13 & 36 & 21 & 45 & 34 & 55 & 55 \\ 5 & 15 & 8 & 21 & 13 & 28 & 21 & 36 & 34 & 45 & 55 & 55 \\ 21 & 8 & 28 & 13 & 36 & 21 & 45 & 34 & 55 & 55 & 66 & 89 \\ 8 & 21 & 13 & 28 & 21 & 36 & 34 & 45 & 55 & 55 & 89 & 66 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, las siguientes dos matrices arrojadas por el mismo código son $P_{12,12}$ y $Q_{12,12}$, en valores redondeados. Ellas se desprenden al imponer sobre $H_{6,6}$ el AF y se pueden apreciar como:

$$P_{12,12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 12 & 5 & 1 & 4 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -5 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 21 & 18 & 6 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 & 4 & -0 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & -6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 0 & -5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_{12,12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 & 2 & 10 & 3 & 15 & 5 & 21 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 & 4 & -7 & 7 & -10 & 10 & -13 & 13 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -2 & -9 & -4 & -14 & -9 & -22 & -16 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -6 & -6 & -11 & -11 & -17 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -4 & 0 & -7 & -0 & -9 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -0 & -8 & -1 & -13 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \end{pmatrix}$$

Ahora, al proseguir con la idea del teorema B.4, para poder obtener la realización mínima del ejemplo, se deben construir, mediante $P_{12,12}$ y $Q_{12,12}$, las matrices $P'_{10,10}$, $P^*_{10,10}$, G_{10} y H_{10} .

Estas matrices corresponden a las matrices 4, 5, 6 y 7 en la salida del código C.3 y se pueden percatar debajo:

$$P'_{10,10} = \begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 1. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 3. & 1.5 & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 1. & 0.5 & -1. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 6. & 4. & 2. & 0.33 & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 2. & 1.5 & -2. & 1.67 & 1. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 10. & 7.5 & 3.5 & 0.67 & 2. & 0.12 & 1. & 0. & 0. & 0. \\ 3. & 2. & -3.5 & 3. & 2. & 1.88 & 0.6 & 1. & 0. & 0. \\ 15. & 12. & 5. & 1.33 & 3.67 & 0.33 & 2.13 & 1.33 & 1. & 0. \\ 5. & 3.5 & -5. & 4.33 & 3.67 & 3.33 & 2.13 & 1.33 & -1.25 & 1. \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$P^*_{10,10} = \begin{pmatrix} 3. & 1.5 & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 1. & 0.5 & -1. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 6. & 4. & 2. & 0.33 & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 2. & 1.5 & -2. & 1.67 & 1. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 10. & 7.5 & 3.5 & 0.67 & 2. & 0.12 & 1. & 0. & 0. & 0. \\ 3. & 2. & -3.5 & 3. & 2. & 1.88 & 0.6 & 1. & 0. & 0. \\ 15. & 12. & 5. & 1.33 & 3.67 & 0.33 & 2.13 & 1.33 & 1. & 0. \\ 5. & 3.5 & -5. & 4.33 & 3.67 & 3.33 & 2.13 & 1.33 & -1.25 & 1. \\ 21. & 17.5 & 6.5 & 2.33 & 5.67 & 0.71 & 3.53 & 5.33 & 4. & -0. \\ 8. & 5.5 & -6.5 & 6. & 5.67 & 4.96 & 5.53 & 0.33 & -5. & 4. \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$G_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Luego, mediante (1) y (2), y dado lo expuesto en el teorema B.4, se obtiene la matriz F_{10} , que corresponde a la cuarta matriz del algoritmo computacional 2, la cual se puede vislumbrar como sigue:

$$F_{10} = (P'_{10,10})^{-1} P^*_{10,10}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & 0 \\ -0 & 1 & 2 & -1.17 & 1 & 0 & 0 & -0 & -0 & 0 \\ -0 & 1.5 & -0 & 0 & 2 & 1 & -0 & -0 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & -1 & -0.67 & -0.21 & 1 & 0 & 0 & -0 \\ 0 & -0 & -0 & 0.17 & 1.33 & 0.42 & -0.4 & 1 & -0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & -0 & 0.03 & 0.18 & 1.21 & 1 & -0 \\ -0 & -0 & -0 & -0 & -0 & -0.05 & 0.77 & -1.27 & -1.85 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0 & -1.42 & 4.11 & 4.33 & -1.33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0 & 1.25 & 0.75 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Con las matrices F_{10} , G_{10} y H_{10} en (3) y (4), se vislumbra ya la realización mínima de $G_{N_{11}}$; en consecuencia, $g(i) = H_{10}(F_{10})^{i-1}G_{10}$, $\forall i \in N_{11}$, lo cual se hace constar con las últimas 11 matrices en la salida del código C.3:

$$\begin{aligned} \hat{g}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \hat{g}_2 &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \hat{g}_3 &= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} & \hat{g}_4 &= \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \\ \hat{g}_5 &= \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} & \hat{g}_6 &= \begin{pmatrix} 21 & 8 \\ 8 & 21 \end{pmatrix} & \hat{g}_7 &= \begin{pmatrix} 28 & 13 \\ 13 & 28 \end{pmatrix} & \hat{g}_8 &= \begin{pmatrix} 36 & 21 \\ 21 & 36 \end{pmatrix} \\ \hat{g}_9 &= \begin{pmatrix} 45 & 34 \\ 34 & 45 \end{pmatrix} & \hat{g}_{10} &= \begin{pmatrix} 55 & 55 \\ 55 & 55 \end{pmatrix} & \hat{g}_{11} &= \begin{pmatrix} 66 & 89 \\ 89 & 66 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para clausurar esta sección se participan al lector dos cosas. La primera es que si la sucesión finita $G_{N_{11}}$ se llegara a expandir a G_{N_k} , $k > 11$, la nueva RPM, a saber $F_{n'}$, $G_{n'}$ y $H_{n'}$, es tal que:

$$F_{n'} = F_{10}; G_{n'} = G_{10}; H_{n'} = H_{10}$$

siempre y cuando $n' = n = 10$ o, por otro lado,

$$F_{n'} = \begin{pmatrix} f_{1,1} \dots f_{1,10} & f_{1,11} \dots f_{1,n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{10,1} \dots f_{10,10} & f_{10,11} \dots f_{10,n'} \\ f_{11,1} \dots f_{11,10} & f_{11,11} \dots f_{11,n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n',1} \dots f_{n',10} & f_{n',11} \dots f_{n',n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_n & f_{1,11} \dots f_{1,n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{10,11} \dots f_{10,n'} \\ f_{11,11} \dots f_{11,n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n',11} \dots f_{n',n'} \end{pmatrix}$$

$$G_{n'} = \begin{pmatrix} g_{1,1} \dots g_{1,\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{10,1} \dots g_{10,\eta} \\ g_{11,1} \dots g_{11,\eta} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n',1} \dots g_{n',\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ g_{10,1} & g_{10,2} \\ g_{11,1} & g_{11,2} \\ \vdots & \vdots \\ g_{n',1} & g_{n',2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_n \\ g_{11,1} & g_{11,2} \\ \vdots & \vdots \\ g_{n',1} & g_{n',2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} H_{n'} &= \begin{pmatrix} h_{1,1} \dots h_{1,10} & h_{1,11} \dots h_{1,n'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{\mu,1} \dots h_{\mu,10} & h_{\mu,11} \dots h_{\mu,n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{1,1} \dots h_{1,10} & h_{1,11} \dots h_{1,n'} \\ h_{2,1} \dots h_{2,10} & h_{2,11} \dots h_{2,n'} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{H}_n & h_{1,11} \dots h_{1,n'} \\ h_{2,11} \dots h_{2,n'} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La segunda es que a la subsucesión parcial se le demanda cumplir con la condición del teorema B.4:

$$\text{rango } H_{\beta,\alpha}(J_N) = \text{rango } H_{\beta,\alpha+1}(J_N) = \text{rango } H_{\beta+1,\psi}(J_N) = n$$

Sin embargo, algunas subsucesiones no la garantizan. En este caso, sobre la subsucesión es posible hacer dos cosas para que la cumpla: (i) aumentar su número de elementos, activando el sistema o (ii) expandir su número de elementos, pero sin emplear al sistema [Schutter, 2000: 12]. Bajo la última opción, debe advertirse que pueden existir diversas extensiones de matrices que aseguran el cumplimiento de la condición. Lo que se sugiere es optar por aquella que garantice que el orden del sistema mínimo sea el más pequeño entre todas. La determinación de tal extensión es un proceso que se puede examinar en Kalman [1971].

2.2. REALIZACIÓN ESTOCÁSTICA: AMPLIACIÓN DE LA RPM

La realización de una DE finita de un sistema tiene dos hándicaps. El primero estriba en que los valores de la sucesión pueden corromperse por efecto de la aleatoriedad, generando desviaciones estocásticas de los valores reales del sistema; y el segundo gravita en torno a que el sistema puede tener naturaleza esencialmente no lineal.

En ambos casos, las condiciones que debe tener la matriz de Hankel para la génesis de la realización mínima casi nunca se cumplen o, en su defecto, se cumplen, pero se obtiene aun así un sistema sobredimensionado, es decir, su dimensión subyacente es menor a la que se obtiene a partir de las medidas con ruido, o es una “mala” aproximación lineal a un sistema subyacente esencialmente no lineal.

Esta tesitura puede ser corregida al depurar lo estocástico de la sucesión, o provocando una “mejor” aproximación lineal

al sistema esencialmente no lineal. Existen dos tipos de métodos para realizar esto: el de caja blanca y el de caja negra [Schutter, 2000: 17]. El método que se empleará reside en un segundo tipo. Consiste en confeccionar un modelo de baja dimensión sin conocer el estado interno del sistema y sin poder conocer el grado de aleatoriedad de los datos. Tal método, además, según Kung y Arun [1987], combina dos atributos: permite disminuir la complejidad computacional y produce una “suavización” de las perturbaciones en los datos.

El modelo de baja dimensión emplea el teorema A.14 de *descomposición del valor singular* (SVD, por sus siglas en inglés), el cual dice que cualquier matriz $A \in R^{n \times m}$ puede ser descompuesta en tres matrices T , T' y Σ_A , las cuales satisfacen que $A = T\Sigma_A T'$, donde Σ_A es la matriz cuya diagonal principal tiene los valores propios de A .

Se empleará el *algoritmo de componentes principales* de Hankel (PHC, por sus siglas en inglés), que utilizan Arun, *et al.* [1983: 223] para hacer el modelo de baja dimensión. El algoritmo PHC se puede ver de forma compacta y general mediante el formato que emplea Schutter [2000: 13], aunque aquí se incorporan precisiones y extensiones:

- (1) Dada una sucesión G_{Nn} con elementos en $M_{\mu \times \eta}$, se obtiene su MH $H_{r,s} \in M_{r\mu \times s\eta}$, donde $r + s = n + 1$.
- (2) Mediante el teorema SVD, se hallan las matrices U , V y Σ tales que

$$H_{r,s} = U\Sigma V$$
- (3) Sea $\{\sigma_i\}$ la diagonal principal de Σ y n el número total de valores singulares $\sigma(A)$. Se conservan únicamente los $k < n$ valores que sean “significativos”,^{xx} donde k es múltiplo de μ , para poder cumplir una de las hipótesis del teorema B.4.

^{xx} La “significancia” de los valores singulares se explicará más adelante al desarrollar el ejercicio. Amén de que en las conclusiones se extienden algunas observaciones importantes al respecto.

- (4) Se confeccionan tres nuevas matrices: $U_k = U_{:,1:k}$, $\Sigma_k = \Sigma_{1:k,1:k}$ y $V_k = V_{1:k}$.
- (5) Se obtiene la matriz reducida en $w_k = n - k$ valores singulares de $H_{r,s} (G_{Nn})$, la cual se define como $H_{red_{wk}} (G_{Nn}) = U_k \Sigma_k V_k \in M_{r \mu \times s \eta}$, con k el número de valores singulares más importantes (sin que exista confusión en cuanto a qué sucesión hace referencia, únicamente se designará como $H_{red_{wk}}$
- (6) Y se genera la DI de la matriz reducida $H_{red_{wk}}$

La matriz reducida $H_{red_{wk}}$ en general no contará con una estructura de MH, es decir, los bloques antidiagonales no serán iguales. Sanliturk y Cakar [2005: 620] brindan una forma para tomar toda la información de la matriz reducida. Esto se logra al obtener los elementos promedio de cada bloque antidiagonal de la matriz reducida y con ellos formar una MH del mismo orden. Sin embargo, en el presente trabajo se emplearán únicamente las matrices reducidas para generar la realización mínima (F_k, G_k, H_k) .

Un segundo comentario es que los k valores singulares significativos se obtendrán mediante el promedio de las distancias, elemento a elemento, de la DE real y la DE estimada. Proceder de esta manera permite considerar toda la información y brinda con ella un elemento representativo de la cercanía entre ambas DE. Sin embargo, como se analiza en las conclusiones, una zona de oportunidad emerge ya que no existen criterios únicos y menos aún condiciones generales para determinar los valores singulares idóneos para describir el sistema subyacente, sin ruido, con base en la DE real con ruido.

Ahora, para ilustrar el proceso de obtención de una realización de baja dimensión, se emplean los resultados que arroja el código C.4, y la siguiente sucesión G_{Nn}

$$\begin{aligned}
g_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & g_2 &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & g_3 &= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} & g_4 &= \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \\
g_5 &= \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} & g_6 &= \begin{pmatrix} 21 & 8 \\ 8 & 21 \end{pmatrix} & g_7 &= \begin{pmatrix} 28 & 13 \\ 13 & 28 \end{pmatrix} & g_8 &= \begin{pmatrix} 36 & 21 \\ 21 & 36 \end{pmatrix} \\
g_9 &= \begin{pmatrix} 45 & 34 \\ 34 & 45 \end{pmatrix} & g_{10} &= \begin{pmatrix} 55 & 55 \\ 55 & 55 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Inicialmente se obtienen los valores r , s y n asociados con las 10 matrices, y se construye la MH respectiva. Mediante el código C.4, los valores que se obtienen son $r = 5$, $s = 6$ y $n = 10$, así la MH es:

$$H_{5,6}(G_{N_{10}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 & 2 & 10 & 3 & 15 & 5 & 21 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 6 & 3 & 10 & 5 & 15 & 8 & 21 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 10 & 3 & 15 & 5 & 21 & 8 & 28 & 13 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 3 & 10 & 5 & 15 & 8 & 21 & 13 & 28 \\ 6 & 2 & 10 & 3 & 15 & 5 & 21 & 8 & 28 & 13 & 36 & 21 \\ 2 & 6 & 3 & 10 & 5 & 15 & 8 & 21 & 13 & 28 & 21 & 36 \\ 10 & 3 & 15 & 5 & 21 & 8 & 28 & 13 & 36 & 21 & 45 & 34 \\ 3 & 10 & 5 & 15 & 8 & 21 & 13 & 28 & 21 & 36 & 34 & 45 \\ 15 & 5 & 21 & 8 & 28 & 13 & 36 & 21 & 45 & 34 & 55 & 55 \\ 5 & 15 & 8 & 21 & 13 & 28 & 21 & 36 & 34 & 45 & 55 & 55 \end{pmatrix}$$

Posteriormente se emplea el algoritmo SVD sobre la matriz anterior, consiguiendo las matrices:

$$U = \begin{pmatrix} -0.12 & 0.21 & 0.32 & 0.48 & 0.43 & -0.51 & 0.19 & -0.13 & -0.28 & -0.19 \\ -0.12 & -0.21 & -0.32 & 0.48 & 0.43 & 0.51 & 0.19 & 0.13 & 0.28 & -0.19 \\ -0.18 & 0.29 & 0.28 & 0.38 & -0.2 & 0.08 & -0.52 & 0.56 & 0.12 & 0.12 \\ -0.18 & -0.29 & -0.28 & 0.38 & -0.2 & -0.08 & -0.52 & -0.56 & -0.12 & 0.12 \\ -0.26 & 0.35 & 0.17 & 0.18 & -0.28 & 0.1 & 0.42 & -0.37 & 0.45 & 0.39 \\ -0.26 & -0.35 & -0.17 & 0.18 & -0.28 & -0.1 & 0.42 & 0.37 & -0.45 & 0.39 \\ -0.36 & 0.38 & -0.08 & -0.06 & -0.3 & 0.38 & 0.08 & -0.11 & -0.44 & -0.52 \\ -0.36 & -0.38 & 0.08 & -0.06 & -0.3 & -0.38 & 0.08 & 0.11 & 0.44 & -0.52 \\ -0.5 & 0.32 & -0.54 & -0.3 & 0.33 & -0.29 & -0.13 & 0.12 & 0.1 & 0.18 \\ -0.5 & -0.32 & 0.54 & -0.3 & 0.33 & 0.29 & -0.13 & -0.12 & -0.1 & 0.18 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 219.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 55.42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18.48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6.71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.92 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.030 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.1 & -0.2 & -0.2 & -0.3 & -0.3 & -0.4 & -0.4 & -0.5 & -0.5 \\ 0.1 & -0.1 & 0.2 & -0.2 & 0.3 & -0.3 & 0.4 & -0.4 & 0.4 & -0.4 & 0.3 & -0.3 \\ -0.3 & 0.3 & -0.3 & 0.3 & -0.2 & 0.2 & -0.1 & 0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.5 & -0.5 \\ -0.4 & -0.4 & -0.4 & -0.4 & -0.3 & -0.3 & -0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & -0.1 & -0.1 & -0.2 & -0.2 & -0.4 & -0.4 & -0.2 & -0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & -0.5 & 0. & -0. & 0.1 & -0.1 & -0.3 & 0.3 & -0.2 & 0.2 & 0.3 & -0.3 \\ 0.2 & 0.2 & -0.5 & -0.5 & 0.3 & 0.3 & 0. & 0. & 0.3 & 0.3 & -0.2 & -0.2 \\ 0.2 & -0.2 & -0.6 & 0.6 & 0.2 & -0.2 & 0. & -0. & 0.3 & -0.3 & -0.2 & 0.2 \\ -0.3 & 0.3 & -0.1 & 0.1 & 0.6 & -0.6 & -0.1 & 0.1 & -0.3 & 0.3 & 0.1 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & -0.1 & -0.1 & 0.5 & 0.5 & -0.2 & -0.2 & -0.3 & -0.3 & 0.2 & 0.2 \\ -0.1 & 0.1 & 0.2 & -0.2 & 0.1 & -0.1 & -0.6 & 0.4 & 0.5 & -0.3 & -0.1 & 0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & -0.4 & -0.6 & 0.3 & 0.5 & -0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Después habrá que elegir los valores propios más significativos de Σ . Para esto se hace que z sea un múltiplo de μ menor que n [punto (3) del algoritmo PHC], es decir, $z = 2, 4, 6, 8$. Entonces, tomando para cada z las submatrices $U_z = U_{:,1:z}$, $\Sigma_z = \Sigma_{1:z,1:z}$ y $V_z = V_{1:z,:}$ en:

$$U = (U_{:,z} U_{:,p-z}) \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{z,z} & \Sigma_{z,q-z} \\ \Sigma_{p-z,z} & \Sigma_{p-z,q-z} \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} V_{z,:} \\ V_{q-z,:} \end{pmatrix}$$

donde p, q son el número de filas y columnas de Σ , respectivamente, y multiplicando cada terna, se obtienen cuatro matrices reducidas $H_{red_{ws}} (G_{N_{10}}) \in M_{10 \times 12}$:

$$H_{red_8} = U_2 \Sigma_2 V_2$$

$$= \begin{pmatrix} 3.856 & 0.555 & 5.883 & 0.838 & 8.296 & 1.522 & 11.046 & 2.884 & 14.016 & 5.476 & 17.041 & 10.124 \\ 0.555 & 3.856 & 0.838 & 5.883 & 1.522 & 8.296 & 2.884 & 11.046 & 5.476 & 14.016 & 10.124 & 17.041 \\ 5.498 & 0.961 & 8.388 & 1.453 & 11.843 & 2.532 & 15.807 & 4.59 & 20.139 & 8.401 & 24.641 & 15.134 \\ 0.961 & 5.498 & 1.453 & 8.388 & 2.532 & 11.843 & 4.59 & 15.807 & 8.401 & 20.139 & 15.134 & 24.641 \\ 7.379 & 1.817 & 11.255 & 2.756 & 15.939 & 4.527 & 21.394 & 7.645 & 27.51 & 13.124 & 34.141 & 22.489 \\ 1.817 & 7.379 & 2.756 & 11.255 & 4.527 & 15.939 & 7.645 & 21.394 & 13.124 & 27.51 & 22.489 & 34.141 \\ 9.435 & 3.457 & 14.389 & 5.253 & 20.48 & 8.212 & 27.745 & 12.966 & 36.214 & 20.751 & 45.958 & 33.433 \\ 3.457 & 9.435 & 5.253 & 14.389 & 8.212 & 20.48 & 12.966 & 27.745 & 20.751 & 36.214 & 33.433 & 45.958 \\ 11.546 & 6.446 & 17.604 & 9.808 & 25.255 & 14.788 & 34.713 & 22.104 & 46.348 & 33.154 & 60.743 & 50.056 \\ 6.446 & 11.546 & 9.808 & 17.604 & 14.788 & 25.255 & 22.104 & 34.713 & 33.154 & 46.348 & 50.056 & 60.743 \end{pmatrix}$$

$$H_{red_6} = U_4 \Sigma_4 V_4$$

$$= \begin{pmatrix} 0.968 & 0.651 & 3.052 & 1.098 & 6.1 & 2.009 & 10.049 & 3.234 & 14.992 & 5.106 & 20.961 & 7.809 \\ 0.651 & 0.968 & 1.098 & 3.052 & 2.009 & 6.1 & 3.234 & 10.049 & 5.106 & 14.992 & 7.809 & 20.961 \\ 3.065 & 1.173 & 5.995 & 1.802 & 9.974 & 3.042 & 14.952 & 4.929 & 20.976 & 8.045 & 28.043 & 13.008 \\ 1.173 & 3.065 & 1.802 & 5.995 & 3.042 & 9.974 & 4.929 & 14.952 & 8.045 & 20.976 & 13.008 & 28.043 \\ 6.084 & 2.089 & 9.973 & 3.097 & 14.922 & 4.919 & 20.922 & 7.88 & 27.974 & 12.881 & 36.072 & 21.146 \\ 2.089 & 6.084 & 3.097 & 9.973 & 4.919 & 14.922 & 7.88 & 20.922 & 12.881 & 27.974 & 21.146 & 36.072 \\ 10.003 & 3.232 & 14.958 & 5. & 20.941 & 7.961 & 27.963 & 12.827 & 35.998 & 20.893 & 45.031 & 34.163 \\ 3.232 & 10.003 & 5. & 14.958 & 7.961 & 20.941 & 12.827 & 27.963 & 20.893 & 35.998 & 34.163 & 45.031 \\ 14.958 & 4.793 & 21.037 & 7.994 & 28.07 & 13.049 & 36.06 & 21.165 & 45.015 & 34.105 & 54.947 & 54.841 \\ 4.793 & 14.958 & 7.994 & 21.037 & 13.049 & 28.07 & 21.165 & 36.06 & 34.105 & 45.015 & 54.841 & 54.947 \end{pmatrix}$$

$$H_{red_4} = U_6 \Sigma_6 V_6$$

$$= \begin{pmatrix} 0.99 & 0.982 & 3.005 & 1.053 & 6. & 1.975 & 9.997 & 2.997 & 14.992 & 4.977 & 21.006 & 8.019 \\ 0.982 & 0.99 & 1.053 & 3.005 & 1.975 & 6. & 2.997 & 9.997 & 4.977 & 14.992 & 8.019 & 21.006 \\ 3.008 & 1.069 & 6.017 & 1.823 & 10.01 & 3.068 & 15.005 & 5.01 & 20.996 & 8.085 & 27.997 & 12.937 \\ 1.069 & 3.008 & 1.823 & 6.017 & 3.068 & 10.01 & 5.01 & 15.005 & 8.085 & 20.996 & 12.937 & 27.997 \\ 5.997 & 1.945 & 10.003 & 3.127 & 14.972 & 4.957 & 20.999 & 7.992 & 28.005 & 12.936 & 36.004 & 21.047 \\ 1.945 & 5.997 & 3.127 & 10.003 & 4.957 & 14.972 & 7.992 & 20.999 & 12.936 & 28.005 & 21.047 & 36.004 \\ 9.993 & 2.992 & 14.991 & 5.032 & 21.013 & 7.984 & 27.997 & 12.998 & 35.996 & 20.987 & 45.002 & 34.011 \\ 2.992 & 9.993 & 5.032 & 14.991 & 7.984 & 21.013 & 12.998 & 27.997 & 20.987 & 35.996 & 34.011 & 45.002 \\ 15.005 & 5.015 & 21.001 & 7.96 & 28.001 & 13.016 & 36.002 & 21.002 & 45.002 & 34.019 & 54.997 & 54.985 \\ 5.015 & 15.005 & 7.96 & 21.001 & 13.016 & 28.001 & 21.002 & 36.002 & 34.019 & 45.002 & 54.985 & 54.997 \end{pmatrix}$$

$$H_{red_2} = U_8 \Sigma_8 V_8$$

$$= \begin{pmatrix} 0.996 & 1.003 & 2.999 & 1.001 & 6.008 & 1.996 & 9.999 & 3. & 14.996 & 5.002 & 21.001 & 8. \\ 1.003 & 0.996 & 1.001 & 2.999 & 1.996 & 6.008 & 3. & 9.999 & 5.002 & 14.996 & 8. & 21.001 \\ 3.002 & 0.999 & 6.001 & 2. & 9.996 & 3.002 & 15.001 & 5. & 21.002 & 7.999 & 27.999 & 13. \\ 0.999 & 3.002 & 2. & 6.001 & 3.002 & 9.996 & 5. & 15.001 & 7.999 & 21.002 & 13. & 27.999 \\ 6.007 & 1.996 & 10.002 & 2.999 & 14.987 & 5.006 & 21.003 & 8. & 28.006 & 12.998 & 35.997 & 21. \\ 1.996 & 6.007 & 2.999 & 10.002 & 5.006 & 14.987 & 8. & 21.003 & 12.998 & 28.006 & 21. & 35.997 \\ 9.993 & 3.004 & 14.998 & 5.001 & 21.014 & 7.995 & 27.997 & 13. & 35.993 & 21.001 & 45.003 & 34. \\ 3.004 & 9.993 & 5.001 & 14.998 & 7.995 & 21.014 & 13. & 27.997 & 21.001 & 35.993 & 34. & 45.003 \\ 15.002 & 4.999 & 21.001 & 8. & 27.996 & 13.001 & 36.001 & 21. & 45.002 & 34. & 54.999 & 55. \\ 4.999 & 15.002 & 8. & 21.001 & 13.001 & 27.996 & 21. & 36.001 & 34. & 45.002 & 55. & 54.999 \end{pmatrix}$$

A partir de ellas se pasa a elegir cuáles son los primeros z valores propios significativos. Con este fin, y apoyados en el código C.4, se comienza por determinar (F_z, G_z, H_z) de $H_{red_{wz}}$, para $z = 2, 4, 6, 8$. Las cuatro representaciones de espacio de estado a dos decimales son:

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1.25 & -0.07 \\ -0.06 & 1.28 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 4. & 1. \\ 0. & 3.75 \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1. & 0. \\ 0.25 & 1. \end{pmatrix}$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} 3. & 1.5 & 1. & 0. \\ -2. & -1. & -2. & 1. \\ 0. & 1. & 2. & -1.17 \\ 0. & 1.5 & 0. & 0. \end{pmatrix} \quad G_4 = \begin{pmatrix} 1. & 1. \\ 0. & 0. \\ 0. & -2. \\ 0. & 0. \end{pmatrix} \quad H_4 = \begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. \\ 1. & 1. & 0. & 0. \end{pmatrix}$$

$$F_6 = \begin{pmatrix} 3. & 1.5 & 1. & -0. & -0. & 0. \\ -2. & -1. & -2. & 1. & -0. & -0. \\ 0. & 1. & 2. & -1.17 & 1. & 0. \\ -0. & 1.5 & -0. & -0. & 2. & 1. \\ 0. & 0. & 1.5 & -1. & -0.67 & -0.21 \\ 0. & 0. & 0. & 0.17 & 1.33 & 0.42 \end{pmatrix} \quad G_6 = \begin{pmatrix} 1. & 1. \\ 0. & 0. \\ 0. & -2. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{pmatrix}$$

$$H_6 = \begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 1. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{pmatrix}$$

$$F_8 = \begin{pmatrix} 3. & 1.5 & 1. & -0. & -0. & 0. & -0. & 0. \\ -2. & -1. & -2. & 1. & 0. & -0. & 0. & -0. \\ 0. & 1. & 2. & -1.17 & 1. & -0. & 0. & -0. \\ 0. & 1.5 & 0. & 0. & 2. & 1. & 0. & -0. \\ -0. & -0. & 1.5 & -1. & -0.67 & -0.21 & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0.17 & 1.33 & 0.42 & -0.4 & 1. \\ 0. & 0. & 0. & -0.1 & -0. & 0.03 & 0.18 & 1.21 \\ -0. & 0. & -0. & 0. & 0. & -0.05 & 0.77 & -1.27 \end{pmatrix} \quad G_8 = \begin{pmatrix} 1. & 1. \\ 0. & 0. \\ 0. & -2. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{pmatrix}$$

$$H_8 = \begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 1. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{pmatrix}$$

Posteriormente se obtienen las matrices estimadas \hat{g}_{i_z} , $i_z \in N_{10}$, con base en (F_z, G_z, H_z) , $z = 2, 4, 6, 8$.

1. A partir de la realización (F_2, G_2, H_2) :

$$\hat{g}_1 = \begin{pmatrix} 4.00 & 1.00 \\ 1.00 & 4.00 \end{pmatrix} \quad \hat{g}_2 = \begin{pmatrix} 5.00 & 1.00 \\ 1.00 & 5.00 \end{pmatrix} \quad \hat{g}_3 = \begin{pmatrix} 6.27 & 0.93 \\ 0.93 & 6.27 \end{pmatrix} \quad \hat{g}_4 = \begin{pmatrix} 7.88 & 0.76 \\ 0.76 & 7.88 \end{pmatrix}$$

$$\hat{g}_5 = \begin{pmatrix} 9.92 & 0.44 \\ 0.44 & 9.92 \end{pmatrix} \quad \hat{g}_6 = \begin{pmatrix} 12.54 & -0.10 \\ -0.10 & 12.54 \end{pmatrix} \quad \hat{g}_7 = \begin{pmatrix} 15.89 & -0.96 \\ -0.96 & 15.89 \end{pmatrix} \quad \hat{g}_8 = \begin{pmatrix} 20.20 & -2.28 \\ -2.28 & 20.20 \end{pmatrix}$$

$$\hat{g}_9 = \begin{pmatrix} 25.73 & -4.23 \\ -4.23 & 25.73 \end{pmatrix} \quad \hat{g}_{10} = \begin{pmatrix} 32.88 & -7.08 \\ -7.08 & 32.88 \end{pmatrix}$$

2. A partir de la realización (F_4, G_4, H_4) :

$$\hat{g}_1 = \begin{pmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{pmatrix} \quad \hat{g}_2 = \begin{pmatrix} 3.00 & 1.00 \\ 1.00 & 3.00 \end{pmatrix} \quad \hat{g}_3 = \begin{pmatrix} 6.00 & 2.00 \\ 2.00 & 6.00 \end{pmatrix} \quad \hat{g}_4 = \begin{pmatrix} 10.00 & 6.00 \\ 3.00 & 13.00 \end{pmatrix}$$

$$\hat{g}_5 = \begin{pmatrix} 15.00 & 17.00 \\ 5.00 & 27.00 \end{pmatrix} \quad \hat{g}_6 = \begin{pmatrix} 21.00 & 43.00 \\ 8.50 & 55.50 \end{pmatrix} \quad \hat{g}_7 = \begin{pmatrix} 28.50 & 99.50 \\ 15.50 & 112.50 \end{pmatrix} \quad \hat{g}_8 = \begin{pmatrix} 39.50 & 216.50 \\ 29.75 & 226.25 \end{pmatrix}$$

$$\hat{g}_9 = \begin{pmatrix} 59.75 & 452.25 \\ 59.25 & 452.75 \end{pmatrix} \quad \hat{g}_{10} = \begin{pmatrix} 103.25 & 920.75 \\ 120.12 & 903.88 \end{pmatrix}$$

3. A partir de la realización (F_6, G_6, H_6) :

$$\begin{aligned}\hat{g}_1 &= \begin{pmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{pmatrix} & \hat{g}_2 &= \begin{pmatrix} 3.00 & 1.00 \\ 1.00 & 3.00 \end{pmatrix} & \hat{g}_3 &= \begin{pmatrix} 6.00 & 2.00 \\ 2.00 & 6.00 \end{pmatrix} & \hat{g}_4 &= \begin{pmatrix} 10.00 & 6.00 \\ 3.00 & 10.00 \end{pmatrix} \\ \hat{g}_5 &= \begin{pmatrix} 15.00 & 5.00 \\ 5.00 & 15.00 \end{pmatrix} & \hat{g}_6 &= \begin{pmatrix} 21.00 & 8.00 \\ 8.00 & 21.00 \end{pmatrix} & \hat{g}_7 &= \begin{pmatrix} 27.69 & 12.81 \\ 12.81 & 27.69 \end{pmatrix} & \hat{g}_8 &= \begin{pmatrix} 34.72 & 19.94 \\ 19.94 & 34.72 \end{pmatrix} \\ \hat{g}_9 &= \begin{pmatrix} 41.45 & 30.21 \\ 30.21 & 41.45 \end{pmatrix} & \hat{g}_{10} &= \begin{pmatrix} 47.15 & 44.21 \\ 44.21 & 47.15 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

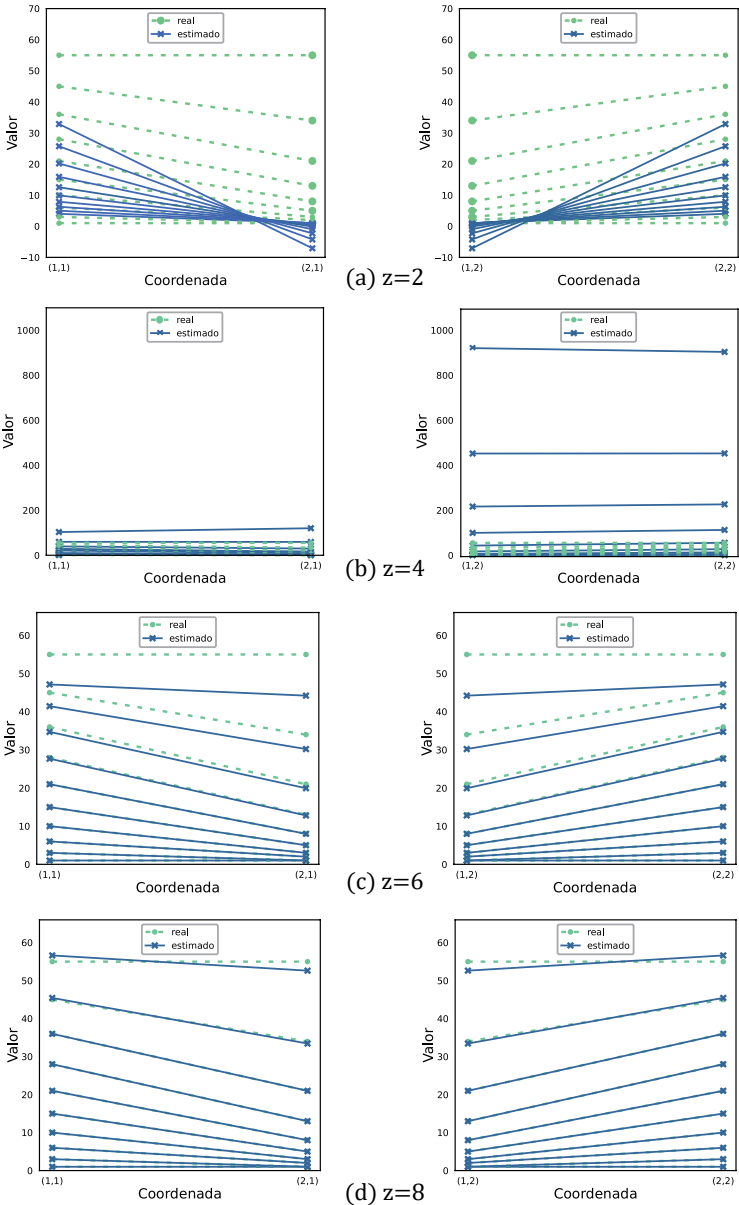
4. A partir de la realización (F_8, G_8, H_8) :

$$\begin{aligned}\hat{g}_1 &= \begin{pmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{pmatrix} & \hat{g}_2 &= \begin{pmatrix} 3.00 & 1.00 \\ 1.00 & 3.00 \end{pmatrix} & \hat{g}_3 &= \begin{pmatrix} 6.00 & 2.00 \\ 2.00 & 6.00 \end{pmatrix} & \hat{g}_4 &= \begin{pmatrix} 10.00 & 6.00 \\ 3.00 & 10.00 \end{pmatrix} \\ \hat{g}_5 &= \begin{pmatrix} 15.00 & 5.00 \\ 5.00 & 15.00 \end{pmatrix} & \hat{g}_6 &= \begin{pmatrix} 21.00 & 8.00 \\ 8.00 & 21.00 \end{pmatrix} & \hat{g}_7 &= \begin{pmatrix} 28.00 & 13.00 \\ 13.00 & 28.00 \end{pmatrix} & \hat{g}_8 &= \begin{pmatrix} 36.00 & 21.00 \\ 21.00 & 36.00 \end{pmatrix} \\ \hat{g}_9 &= \begin{pmatrix} 45.44 & 33.44 \\ 33.44 & 45.44 \end{pmatrix} & \hat{g}_{10} &= \begin{pmatrix} 56.63 & 52.63 \\ 52.63 & 56.63 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Después, se escoge el valor $z \in \{2, 4, 6, 8\}$ tal que $\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} d_F(g_i, g_{iz}) \leq \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} d_F(g_i, g_{iy})$ para cada $y \in \{2, 4, 6, 8\}$. Para este proceso se utiliza la función de distancia de la definición A.15, que corresponde a la distancia inducida mediante la norma de Frobenius (ver el apéndice A.1), y que se denomina distancia de Frobenius. Una interpretación equivalente es $d_F(A, B) = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A_{ij} - B_{ij})^2}$, inmediata a partir de su definición. La equivalencia ayuda a visualizar la proximidad entre las matrices de la DE real y la DE estimada para cada elección de valores singulares, como se muestra en la gráfica 2.1 (a y d).

Se observa que en el eje horizontal aparecen las coordenadas (1,1), (2,1), (1,2) y (2,2) de las matrices, y en el eje vertical, su valor. El punto y las líneas punteadas en gris están asociados con las matrices reales, mientras que el tache y las líneas negras, a las estimadas. Las líneas en gris y negro refuerzan el sentido de proximidad entre la DE real y la estimada. Esto

Gráfica 2.1. Comparación de las entradas de las matrices de la DE real contra las de la DE estimadas.



Fuente: elaboración propia.

debido a que la definición equivalente de la distancia de Frobenius afirma que la proximidad entre dos matrices es una función de las diferencias de sus entradas, coordenada a coordenada. Es así que entre más imbricadas estén las líneas negras y grises más parecidas son la DE real y estimada.

La descripción gráfica muestra que la estimación más próxima a la DE real es cuando se toman ocho valores singulares. Para reforzar ese indicio se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} d_F(g_i, g_{iz}) &= 25.89 \\ \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} d_F(g_i, g_{iz}) &= 226.43 \\ \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} d_F(g_i, g_{iz}) &= 2.91 \\ \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} d_F(g_i, g_{iz}) &= 0.51\end{aligned}$$

Es así que cuando se toman $z = 8$ valores singulares se tiene la mejor aproximación. Una mención importante es que al hacer más grande z , no siempre mejora la aproximación de la DE estimada a la DE real. Es decir, no hay monotonía en cuanto a la mejora de la estimación con respecto al aumento de valores singulares. Por ejemplo, observando la gráfica 2.1 (a y b) es flagrante que pasar de $z = 2$ a $z = 4$ empeora de manera acentuada la aproximación. Esto justifica la propuesta para determinar los valores singulares significativos; métodos en los que no se contrasten estas posibilidades pueden dejar pasar una elección óptima. No obstante, este trabajo deja abierta una senda de investigación de criterios generales; unos ejemplos se muestran en el próximo capítulo.

3. REALIZACIÓN PARCIAL: APLICACIÓN A UN MODELO INPUT-OUTPUT

El modelo de la matriz de insumo-producto (MIP) simétrica^{XXI} fue conformado por Wassily Leontief en la tercera década del siglo pasado.^{XXII} El modelo plasma el eslabonamiento de intercambio de recursos entre todos los sectores productivos, y su conexión con los consumidores finales. Esto se conforma de modo matemático mediante sistemas de ecuaciones lineales, donde cada una de las igualdades que lo componen personifica la trayectoria de un bien de una industria dentro de todo el entorno económico [Miller y Blair, 2009: 1]. Este sistema de ecuaciones se puede expresar de la siguiente manera

$$X = (I_n - T)^{-1}f \quad (1)$$

donde T es la matriz de coeficientes técnicos,^{XXIII} X es el vector que registra el producto total de cada industria, I_n la matriz identidad de orden n , y f la demanda agregada.

La ecuación (1) sostiene desde el punto de vista axiomático las siguientes premisas según Inegi [2014]:

^{XXI} Matriz simétrica aquí tiene un sentido ajeno al mismo concepto del álgebra lineal. Indica de forma subyacente que cada columna j de la matriz refleja el mismo producto que la fila i , en el caso que $i = j$ [Haro, 2008].

^{XXII} El MIP de Leontief es el que considera principalmente la demanda final, además de estimarla exógena, y no la oferta, como el modelo de Gosh.

^{XXIII} Los coeficientes técnicos son los cocientes que emergen de dividir cada entrada de la columna j , entre el valor total de la producción de la fila i , cuando $i = j$. Es decir, dividir el valor de cada insumo usado en la producción del bien i , entre el valor de la producción total del bien i ($= j$).

- i) En el corto plazo la matriz de coeficientes técnicos es fija (estructura productiva inalterada).
- ii) Cada sector produce únicamente un bien y posee solo una técnica productiva (hipótesis de homogeneidad sectorial).
- iii) En el corto plazo existen solo economías de escala constante en todos los sectores (hipótesis de proporcionalidad estricta entre insumos y producto).
- iv) En cada sector las proporciones entre los insumos del proceso de producción son estáticas, no existe la suplencia entre ellos.

Los precios relativos se fijan al hacer proyecciones (hipótesis de invarianza de precios relativos).

Es evidente que los precitados supuestos pueden ser restrictivos; en la realidad los coeficientes técnicos no son inmóviles [Schuschny, 2005]: el cambio tecnológico, la existencia de fondos para producción futura, la variación de las ganancias por economías de escala no constantes, el advenimiento de insumos frescos sustitutos o complementarios, la versatilidad del patrón de intercambio con el exterior, y el cambio en precios relativos, los perturban; los bienes producidos por varias empresas aglomeradas en una industria, dado cualquier nivel de agregación de estas, no son pulcramente homogéneos; la producción en cada industria no necesariamente es de un solo bien y una técnica productiva singular; las economías de escala, aun en el corto plazo, no necesariamente son constantes, y los precios son errátiles.

Entre las principales causas destacan: cambios tecnológicos que afectan la producción, comportamiento en las formas de consumo, aparición y desaparición de productos, cambios en la forma de organización de los mercados, desarrollo de los medios de comunicación y transporte, y la ejecución de determinados regímenes de política económica [Schuschny, 2005].

Incluso, la recolección de datos para colmar la matriz, así como el redondeo de estos, provocan errores inexorables [Schuschny, 2005].

En virtud de lo anterior, varios autores desarrollaron técnicas para hacer menos dócil al modelo frente a sus supuestos, incluido el propio Leontief. Entre estas se cuenta con algunas conducentes a prescindir de las condiciones estáticas al

1. acoplar los cambios tecnológicos y estructurales por medio de funcionalizar la dinámica de los coeficientes técnicos,
2. dividir el producto de cada industria del momento t , entre su uso para la producción en t , $t + 1$, $t + 2$, ...
3. incorporar el recurso econométrico al MIP, o
4. implantar la demanda agregada como elemento endógeno [Molina y Gutiérrez, 2015].

Otras técnicas ayudaron a sortear el problema de la inseguridad sobre los valores recolectados para la confección de la MIP. En este bloque se puede encontrar el modelo de Buckley 6, que opta por una matriz de coeficientes técnicos con números difusos para afrontar la incertidumbre que ostentan los datos [Lazarri y Moriño, 2003]; o el de Bullard y Sebald [1977], quienes generan un intervalo de confianza sobre los datos acopiados.

Los métodos usados, como el RAS o el GRAS o algunos otros métodos no lineales, llegan a no ser del todo cabales como métodos genéricos de estimación o suavización. Según Cabrer *et al.*

para una matriz origen compuesta por valores positivos [los autores] eligen el método RAS, sin embargo, para una matriz inicial que contiene valores negativos, el modelo “de diferencias al cuadrado preservando el signo” es el elegido, ya que realiza la mejor estimación y actualización de la matriz *input-output* [Cabrer *et al.*, 2007: 3].

Incluso, el método RAS “no permite definir restricciones en el proceso de búsqueda de una solución de ajustes” [Parra y

Pino, 2012: 3]. Dentro de este escenario surge la presente investigación sobre el cálculo indirecto de la MIP mediante la TR. Si bien no está dedicada a contrastarla con otros métodos y verificar si solventa los problemas que estos no pueden franquear. Está centrada en la explicación formal, intuitiva y operativa de la TR como método de proyección con el fin de definir si en sí mismo es un método maduro o, por el contrario, contiene zonas perfectibles que de ser enriquecidas podrían redondear el método, su uso y los resultados que arroja.

Para destacar las virtudes y óbices de la TR para sucesiones parciales y con ruido, se generará un ejemplo. La sucesión de matrices que se va a emplear parte de las siguientes identidades contables:

$$Y^* = C^{ve} + X + K$$

$$M = M^c + K^m$$

donde se definen sus elementos como sigue:

Y^* : demanda final

C^{ve} : consumo interno privado y de gobierno, más variación de existencias

X : exportaciones totales

K : formación bruta de capital

M : importaciones totales

M_t^c : importaciones de mercancías para consumo intermedio y final

K^m : importaciones de inversión bruta de capital

las cuales se pueden identificar con un periodo de tiempo t y verlas como:

$$Y_t^* = C_t^{ve} + X_t + K_t$$

$$M_t = M_t^c + K_t^m \quad (2)$$

Luego, se definen las matrices P_t , Q_t y R_t de la siguiente manera:

$$P_t = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \quad Q_t = \begin{pmatrix} Y_t^* \\ M_t \end{pmatrix} \quad R_t = \begin{pmatrix} K_t \\ K_t^m \end{pmatrix}$$

donde $a_{11}(t) = \frac{C_t^{ve}}{Y_t^*}$, $a_{12}(t) = \frac{X_t}{M_t}$, $a_{21}(t) = \frac{M_t^c}{Y_t^*}$ y $a_{22}(t) = 0$, entonces se puede admitir que el sistema (2) esté escrito así:

$$Q_t = P_t Q_t + R_t$$

igualdad que reordenada quedaría de esta forma

$$Q_t = (I_2 - P_t)^{-1} R_t \quad (3)$$

donde I_2 es la matriz identidad de dimensión 2, y $(I_2 - P_t)^{-1}$ es la matriz inversa de Leontief, o matriz de coeficientes de requerimientos directos e indirectos por unidad de demanda final. Operacionalmente, las variables que se emplearán para crear la DE trimestral en (3), es decir, para crear la sucesión de matrices inversas de Leontief, son:

1. X . Exportaciones Economía Interna (FOB) mensuales en dólares.
2. K . Formación Bruta de Capital Fijo trimestral en pesos corrientes y en valores absolutos.
3. C^{ve} . Se compone de la suma de las siguientes variables operacionales:
 - a) Consumo privado trimestral en pesos corrientes.
 - b) Consumo de gobierno trimestral en pesos corrientes.
 - c) Variación de existencias trimestrales en pesos corrientes y en valores absolutos.
4. M^c . Se compone de la suma de las siguientes variables operacionales:
 - a) Importación FOB de Bienes de Consumo trimestrales en pesos corrientes.
 - b) Importación FOB de Bienes Intermedios trimestrales en pesos corrientes.

Los datos de cada una de las variables listadas se encuentran en el cuadro C; además, ahí se ha colocado el tipo de cambio promedio trimestral para convertir a pesos las variables en dólares.

Cuadro 3.1. Distancia promedio entre la DE real y las DE estimadas

Valores singulares (pares)	Distancia promedio*	Valores singulares (pares)	Distancia promedio*
1	0.72	26	1.84
2	1.60E+03	27	1.8
3	4.70E+26	28	1.73
4	2.50E+10	29	1.65
5	0.95	30	0.85
6	1.09	31	1.46
7	5.40E+07	32	1.43
8	27.34	33	1.41
9	1.00E+03	34	1.39
10	306	35	1.37
11	191.64	36	1.35
12	76.65	37	1.32
13	56.34	38	1.31
14	3.48	39	1.3
15	3.27	40	1.28
16	5.66	41	1.25
17	2.97	42	1.22
18	2.76	43	1.18
19	2.61	44	1.13
20	1.1	45	1.08
21	2.38	46	1.01
22	1.05	47	1.01
23	0.96	48	1
24	0.94	49	0.99
25	1.87		

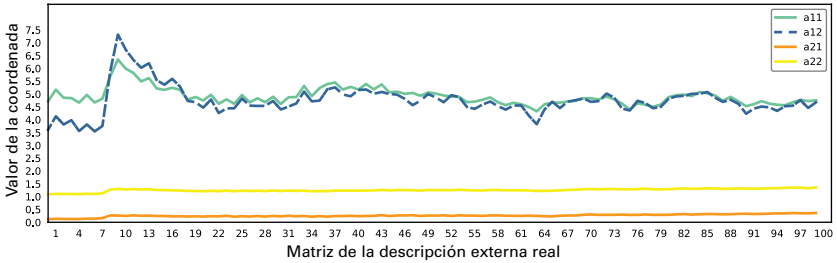
*Se calcula mediante $\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} d_F(g_i, \widehat{g}_i)$

Fuente: elaboración propia

Con los datos anteriores, el código C.5 se encarga de generar 100 matrices trimestrales de Leontief del modelo 3. Los valores de sus coordenadas se pueden ver en la gráfica 3.1.

Las matrices de Leontief de la DE se deben acomodar en las entradas de la MH con rango (n, m) , respetando que $n + m = 101$. La cantidad de MH con tal característica resulta ser 100. En

Gráfica 3.1. Valores en las coordenadas de cada matriz de la DE real



Fuente: elaboración propia.

efecto, como n , m son naturales y deben respetar la igualdad $m = 101 - n$,^{XXIV} entonces m queda determinado por n , y la cantidad de valores que n toma es el número de arreglos de la MH, siendo fácil ver que los valores permitidos de n son los primeros 100 naturales.^{XXV} A partir de las MH, se comprueba si para algún $n \in N_{100}$ cumplen que^{XXVI} $H_{n,100-n} = H_{n,101-n} = H_{n+1,100-n}$. Lo que se deriva del código C.5 es que ninguna lo hace, como era de esperarse. El sistema está sobredimensionado por comportamientos aleatorios en las matrices de Leontief y se aproximará mediante la realización estocástica.

De las 100 MH posibles obtenidas mediante la DE se elige la que permita mayor abundancia de matrices reducidas. Esto equivale a seleccionar la MH con el rango más vasto o el número de valores singulares más amplio. Existen dos matrices emparejadas en este aspecto: $H_{51,50}$ y $H_{50,51}$, con rango de 100. Se prefiere la primera para continuar la ejemplificación del

^{XXIV} El primer bloque fila de la MH tiene como entradas las matrices 1 hasta la m de la DE, mientras que el último bloque columna tiene de la m hasta la 100. El número de matrices en el bloque fila y en el bloque columna son m y $100 - (m - 1)$, respectivamente. Dado que el número de entradas en el bloque columna es n , entonces $n = 100 - (n - 1) = 101 - m$, siempre y cuando, $m = 101 - n$.

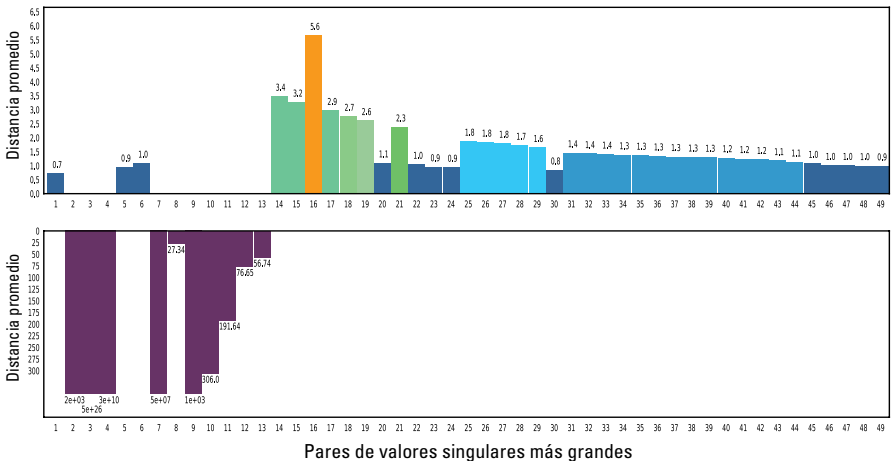
^{XXV} En caso de tomar un valor inferior o superior, n o m serían 0 o negativos, lo cual contradice el hecho de que son naturales.

^{XXVI} Si se cumple, hay forma de garantizar la hipótesis del teorema B.4, sorteando así el procedimiento de realización estocástica.

proceso de realización estocástica. Con ella, el código C.5 crea una matriz reducida por cada i pares de valores singulares más grandes que se tomen, $i = 1, \dots, 49$. Las 49 matrices reducidas y sus sendas DE estimadas serán indexadas por i . La proximidad entre las DE estimadas y la original se puede ver en el cuadro 3.1.

Otra forma de representar las distancias promedio que puede ayudar a percibir mejor el comportamiento de los datos se puede observar en la gráfica 3.2.

Gráfica 3.2. Distancia promedio entre cada DE estimada y la DE real



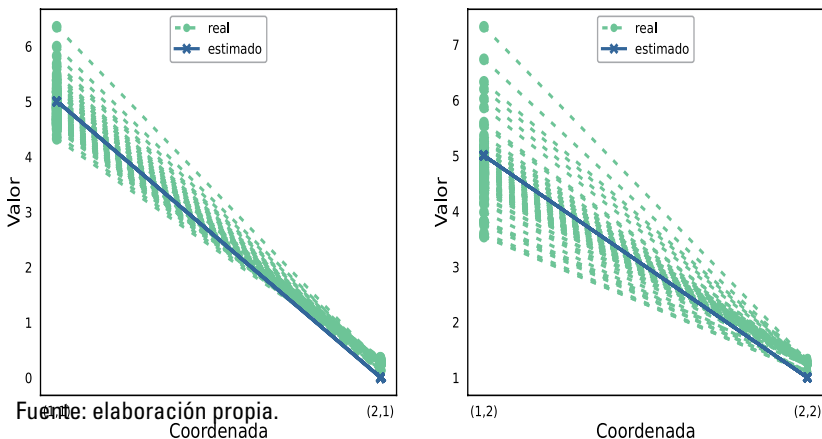
Nótese que al tomar 2, 3, 4, 7 y 9 de los pares de valores singulares más grandes, la distancia promedio se aleja de forma acentuada del resto de casos. Las barras que los representan en la gráfica 3.2 fueron acotadas para no generar problemas de visualización. No obstante, se colocó su magnitud respectiva para poder divisar dicha divergencia. Esto refuerza la idea mencionada en la sección 2.2 en cuanto a la no monotonía de la distancia al aumentar la cantidad de valores singulares. Por su parte, al tomar el primer par más grande de valores singulares se obtiene la DE estimada de mínima

distancia promedio con respecto a la DE real. Esta DE estimada está compuesta por 100 matrices idénticas, es decir, para cada $t \in N_{100}$,

$$\hat{g}_t = HF^{t-1}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo comportamiento con respecto a la DE real se puede apreciar en la gráfica 3.3.

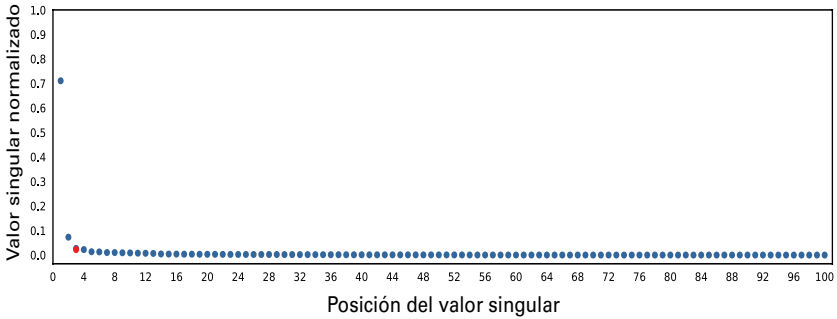
Gráfica 3.3. Comparación de la DE real y la DE estimada generadas con dos valores singulares



Retirar el ruido de una matriz mediante SVD también puede lograrse al determinar un umbral ε a partir del cual todos los valores singulares superiores a él son asociados con el sistema y los menores o iguales no y se identifican como ruido. Sanliturk y Cakar [2005] indican que puede encontrarse este umbral al observar una suavización asintótica de los valores singulares normalizados. Otra versión del método es la mencionada por Allemang y Brown [1998], donde se enfocan las caídas en las tasas de cambio de los valores singulares. Para el presente ejemplo se empleará la primera versión para contrastarla con el esquema de distancias promedio.

Normalizando los datos mediante la división de cada valor singular entre el máximo de ellos [Allemang y Brown, 1998], se obtienen los valores que se muestran en la gráfica 3.4.

Gráfica 3.4. Valores singulares normalizados de $H_{51,50}$



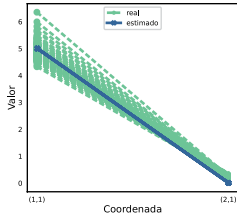
Fuente: elaboración propia.

Una inspección visual de la gráfica hace patente que la asíntota está dada por el eje de las abscisas y la magnitud de los valores singulares se suaviza de manera asíntótica a partir del tercer valor singular. Esto implica que de ese valor en adelante los valores singulares pueden considerarse como ruido. Lo que coincide con el método de las distancias promedio, al elegir como la mejor aproximación el sistema subyacente a la matriz con un par de valores singulares.

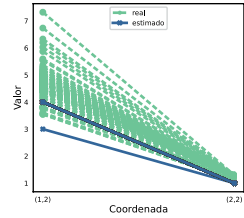
Una diferencia importante con respecto al ejemplo de la sección 2.2 es que en este caso existen muchas aproximaciones cercanas a la DE original. Algunas de ellas se muestran en la gráfica 3.5.

Todas estas aproximaciones no pueden ser totalmente descartadas. Como indican Ballesteros *et al.* [2012] y Sanliturk y Cakar [2005], el proceso de elección de los valores singulares significativos para retirar el ruido es intrincado, y la certitud sobre la elección no es infalible. Sin embargo, el estudio sobre este hecho escapa a los límites de la presente investigación.

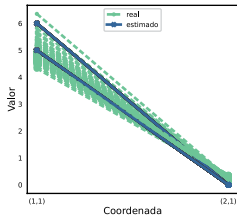
Gráfica 3.5. Comparación de la DE real contra las estimadas en 2° al 6° lugar de distancia.



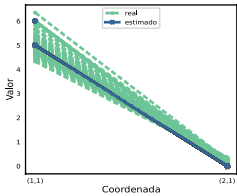
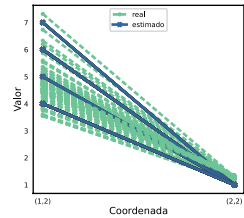
(a) DE estimada en 2º lugar (30 pares de valores singulares)



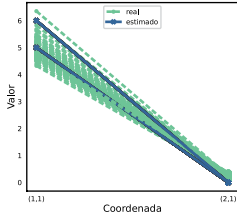
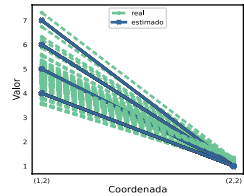
(b) DE estimada en 3º lugar (24 pares de valores singulares)



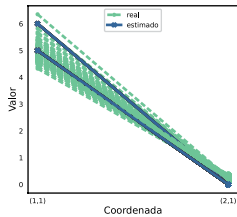
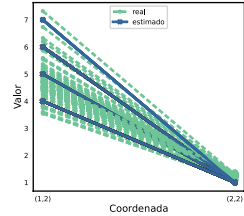
(c) DE estimada en 4º lugar (cinco pares de valores singulares)



(d) DE estimada en 5º lugar (23 pares de valores singulares)



(e) DE estimada en 6º lugar (49 pares de valores singulares)



Fuente: elaboración propia.

Una vez con la DE estimada del modelo, determinar las matrices de Leontief consta de invertir cada matriz de la DE, multiplicarlas por -1 y sumarles la matriz identidad, es decir,

$$\begin{aligned}
 P_t &= I_2 - (GF^tH)^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

A continuación, se explican las interpretaciones de los resultados arrojados por la aproximación de mínima distancia promedio. La primera es que el sistema subyacente, sin ruido, ha sido prácticamente estacionario por 25 años. Una segunda interpretación es que la aproximación solo brinda elementos representativos de agrupamientos de matrices de la DE del sistema subyacente. Esto podría suceder si el sistema subyacente es no lineal, o debido a la pérdida de información del sistema subyacente al momento de retirar el ruido en la MH, mediante la sustracción de valores singulares.

Una tercera explicación es que el método brinda elementos representativos de segmentos de matrices de la DE del sistema subyacente, al igual que en la segunda interpretación. Sin embargo, esto no lo realiza debido a la no linealidad o pérdida de información. En cambio, surge como parte de la propia aproximación y constituye una forma de determinación del cambio estructural del sistema subyacente. En todo caso, la determinación matemática precisa para definir cuál es la interpretación correcta escapa a los objetivos de este trabajo.

Por último, cabe hacer mención sucinta sobre la posible adaptación de ciertos pasos posteriores al ajuste del modelo. Ellos son el análisis de estabilidad y controlabilidad del sistema y, en su caso, el diseño del control del sistema. Debido a que profundizar en este sentido no es parte de los objetivos de

este trabajo, se invita a consultar a Figueroa *et al.* [2012] para tener una idea inespecífica al caso que vemos, pero en general intuitiva. Su implementación podría permitir la definición de condiciones para planificar políticas que atenúen perturbaciones indeseables en el sistema subyacente.

CONCLUSIONES

El método derivado de la TR permite generar una proyección de coeficientes técnicos con ruido mediante los procesos consecutivos: reducción de orden mediante el teorema A.14 (SVD), descomposición en matrices P y Q mediante el algoritmo respectivo, generación de la DI por medio de la última sección de la demostración del teorema B.4, selección de la DE estimada mejor ceñida a la DE del sistema subyacente mediante la distancia de Frobenius promedio, y determinación de los coeficientes técnicos al igualar la DE estimada con la fórmula de la matriz inversa de Leontief.

Los procesos para determinar los coeficientes técnicos tienen relativa facilidad operacional y el algoritmo que crea la DI tiene un bajo costo computacional con respecto a otros algoritmos con la misma finalidad. Esto último debido a que las DI se anidan al aumentar el número de elementos de la DE, es decir, teniendo una realización (F, G, H) para una sucesión, si la sucesión se incrementa, la nueva realización (F', G', H') tiene como submatrices a F, G y H , y solo habría que calcular los valores restantes. Esto puede ayudar al procesamiento computacional de sucesiones con matrices de dimensiones amplias, ya que, asumiendo que pueda resultar difícil su procesamiento inicial, después únicamente se tendrían que calcular los elementos subsecuentes. Además, en términos intuitivos, también es relativamente fácil comprender los procesos implicados y su sucesión.

Sin embargo, aún hay partes que deben investigarse para brindar un método que otorgue total certeza sobre los alcances y límites de los procesos y resultados. Una de ellas es la definición del rango adecuado de la MH para poder obtener la mejor aproximación al sistema subyacente. En el trabajo se empleó aquella matriz con el mayor número de valores singulares; no obstante, es necesario deslindar y formalizar los requisitos para saber si existe y cuáles serían las condiciones para conocer el orden óptimo de la MH y cómo determinarlo. Para aplicaciones en ingeniería parece que los métodos para esta selección son más bien validados de forma práctica, en la medida en que las cualidades de los resultados y procesos obtenidos concuerdan, con cierta frecuencia, con las deseadas.

Una segunda zona de oportunidad es el método de selección de los valores singulares significativos asociados con el sistema subyacente. La información resultante no presenta demostraciones formales contundentes sobre lo oportuno de una selección con respecto a otras. El uso de la estadística parece ser una manera de subsanar este tema, sin embargo, queda abierta la pregunta de investigación sobre cuáles serían las condiciones formales que podrían ayudar a generar una selección de valores singulares sin el uso de la estadística. Además de afirmar o descartar si elegir valores singulares no consecutivos puede generar un proceso óptimo y, en tal caso, cuáles son los requisitos formales.

La última zona de oportunidad son las implicaciones de la interpretación del método y sus resultados. La falta de definición formal en este aspecto deja abiertas muchas dudas. Por un lado, queda la pregunta sobre cómo determinar si el método permite generar una idea de cambio estructural, y en qué procesos recae dicho hecho y bajo qué condiciones. Un segundo tema es si mediante los procesos y resultados del método se puede determinar si el sistema subyacente es no lineal. Otra situación es en qué medida la aproximación se distancia de la DE del sistema subyacente. Por último, cómo saber si

el método puede determinar clústeres, o no, de los elementos de la DE del sistema subyacente, y además conocer si es posible evitar este hecho. Como en muchos casos, la solvencia de lo mencionado podría darse mediante la aplicación de estadística en el proceso, sin embargo, queda abierta la investigación en términos no estadísticos.

APÉNDICE A
ÁLGEBRA LINEAL, TEORÍA DE LA REALIZACIÓN
Y DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES

A.1. ÁLGEBRA LINEAL

Definición A.1 (espacio vectorial). Sea F un cuerpo. Un conjunto $V \neq \emptyset$ con las operaciones $+$: $V \times V \rightarrow V$ y \cdot : $F \times V \rightarrow V$, llamadas adición y multiplicación escalar, respectivamente, se dice que es un *espacio vectorial* sobre un cuerpo F si

- (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;
- (b) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{g}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{g}$;
- (c) $\exists! \mathbf{0} \in \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}$;
- (d) $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}$, $\exists! -\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
- (e) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}$;
- (f) $(c_1c_2)\mathbf{a} = C_1(c_2\mathbf{a})$;
- (g) $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$;
- (h) $(c_1 + c_2)\mathbf{a} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{a}$.

A los elementos de V se les nominará vectores y a los de F escalares. Al vector $0 \in V$ que satisface el inciso (c) se le llamará *vector nulo* o *vector cero*, y al vector $-\mathbf{a} \in V$ que satisface (d) se le denomina *vector inverso aditivo* de $\mathbf{a} \in V$.

Definición A.2 (combinación lineal). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F . Un vector $b \in V$ se dice que es una *combinación lineal* de los vectores $a_1, \dots, a_n \in V$ siempre que existan $c_1, \dots, c_n \in F$ tales que

$$b = \sum_{i=1}^n c_i a_i$$

Definición A.3 (subespacio generado). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F , sea $S \subseteq V$ y sea A_s el conjunto de subespacios de V que contienen a S . Se dice que el *subespacio generado* por S es el conjunto W_s definido como

$$W_s = \bigcap_{N \in A_s} N$$

Teorema A.1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F , sea $S \subseteq V$ no vacío. Si L es el conjunto de combinaciones lineales de S , entonces, el espacio generado por S es L .

Demostración. Sea W_s el espacio generado por S . Tomando $a \in L$ arbitrario, entonces $a = \sum_{b \in S} c_b b$, con $c_b \in F$. Como cada $b \in S \subseteq W_s$ y W_s es un espacio vectorial, entonces cada $c_b b$ pertenece a W_s ; es más, la suma de todos ellos pertenece a W_s . Por consiguiente, $a \in W_s$, y así se tiene que $L \subseteq W$.

Por otro lado, sean $a_1, a_2 \in L$ y $c_{a_1} \in F$ arbitrarios, entonces $a_1 = \sum_{b \in S} c_b b$ y $a_2 = \sum_{b \in S} d_b b$ y, por consiguiente:

$$\begin{aligned} c_{a_1} a_1 + a_2 &= c_{a_1} \sum_{b \in S} c_b b + \sum_{b \in S} d_b b \\ &= \sum_{b \in S} c_{a_1} c_b b + \sum_{b \in S} d_b b \\ &= \sum_{b \in S} (c_{a_1} c_b b + d_b b) \\ &= \sum_{b \in S} (c_{a_1} c_b + d_b) b \end{aligned}$$

Por lo que $c_{a_1} a_1 + a_2 \in L$. Por tanto, L es subespacio vectorial y como contiene a S , entonces $W \subseteq L$.

$$\therefore W = L.$$

Definición A.4 (dependencia lineal). Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo F y sea $S \subseteq V$. Se dice que S es *linealmente*

dependiente si existe una combinación lineal de los vectores $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$, tal que

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n = \overline{0}$$

donde algún escalar $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$ no sea nulo. Si un conjunto no es linealmente dependiente se dirá que es *linealmente independiente*. Decir que un conjunto es linealmente dependiente o independiente será lo mismo que decir que sus vectores son linealmente dependientes o independientes.

Definición A.5 (base de un espacio vectorial). Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F y sea $S \subseteq V$. Se dice que S es una base de V si es linealmente independiente y genera a V . Se define la dimensión de V como la cardinalidad de S y se representa como $\dim(V)$. Si la cardinalidad de S es finita, se dice que V es finito.

Teorema A.2. Sea V un espacio sobre el cuerpo F que es generado por un conjunto finito de vectores b_1, b_2, \dots, b_m . Entonces cualquier conjunto independiente de vectores en V es finito y contiene no más de m vectores.

Demostración. Véase Hoffman y Kunze [1971: 44].

Corolario A.2.1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo F y sea $n = \dim V$. Entonces

- (a) Cualquier subconjunto de V que contenga más de n vectores es linealmente dependiente.
- (b) Ningún subconjunto de V que contenga menos de n vectores puede generar V .

Demostración. Véase Hoffman y Kunze [1971: 44-45].

Definición A.6. Sea $A \in M_{n \times m}(F)$. Se dice que el rango fila de A es la dimensión del espacio generado por las filas de A . El rango columna de A se define como la dimensión del espacio generado por las columnas de A .

Teorema A.3. Si $A \in M_{n \times m}(F)$, entonces $\text{rango fila}(A) = \text{rango columna}(A)$.

Demostración. Véase Hoffman y Kunze [1971: 72].

Definición A.7. Sea $A \in M_{n \times m}(F)$. Se dice que el rango de A es la dimensión del espacio generado por las filas o las columnas de A .

Teorema A. 4. Sea K un anillo conmutativo con unidad y sea n un entero positivo. Existe exactamente una función determinante sobre el conjunto de las matrices $n \times n$ sobre F , y es la función \det definida por $\det(A) = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) A(1, \sigma_1) \dots A(n, \sigma_n)$.^{xxvii}

Demostración. Véase Hoffman y Kunze [1971: 150-152].

Teorema A.5. Sea $A \in It_n(F)$ con $A_{i,i} \neq 0, \forall i \in N_n$. Entonces existe su inversa, A^{-1} .

Demostración. Solo hay que probar que las columnas de la A son linealmente independientes. En efecto, si lo son, generan el espacio F^n , en particular los vectores canónicos de este espacio. Así, existen coeficientes asociados con cada combinación lineal. Todos ellos forman la matriz inversa que se busca.

Si existen coeficientes no nulos $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_k}$ tales que la combinación lineal de las columnas de A es igual al vector nulo, entonces tomando el menor de ellos:

$$\sum_{i=1}^k b_{ji} A_{jrji} = b_{ji} A_{ji} = 0$$

Sin embargo, como $A_{jji}, b_{ji} \neq 0$, se llega a una contradicción.
 \therefore Las columnas de A son linealmente independientes.

^{xxvii} La función $\text{sgn } \sigma$ es 1 si σ es par y -1 si σ es impar. Aquí σ es una permutación de los números $1, \dots, n$ en sí mismos $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \{1, \dots, n\}$.

Teorema A.6. Sea $A \in It_n(F)$ tal que su diagonal principal es unitaria, y sea $n_1 \in N_{n-1}$. Si $A_1 = A_{1:n_1, 1:n_1}$ es la submatriz de las primeras n_1 filas y columnas de A . Entonces,

$$A_1^{-1} = A_2$$

donde $A_2 = (A^{-1})_{1:n_1, 1:n_1}$ es la submatriz de las primeras n_1 filas y columnas de A^{-1}

Demostración. Por el teorema A.5, entonces existen A_1^{-1} y A^{-1} , y por ende existe A_2 . Luego, para cada $i, j \in N_{n_1}$

$$(A_1 A_2)_{i,j} = \sum_{r=1}^{n_1} (A_1)_{i,r} (A_2)_{r,j} = \sum_{r=1}^{n_1} (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j}$$

Como $(A)_{i,r} = 0$, si $i < r$, entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n_1} (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j} &= \sum_{r=1}^{n_1} (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j} + 0 \\ &= \sum_{r=1}^{n_1} (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j} + \sum_{r=n_1+1}^n (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j} \\ &= \sum_{r=1}^n (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j} \\ &= \delta(i-j) \end{aligned}$$

Es decir, $A_1 A_2 = I_{n_1}$, lo cual implica que:

$$A_2 = I_{n_1} A_2 = (A_1^{-1} A_1) A_2 = A_1^{-1} (A_1 A_2) = A_1^{-1} I_{n_1} = A_1^{-1}$$

$$\therefore A_2 = A^{-1}$$

Definición A.8. Sea $z = a + bi \in C$, con $a, b \in R$. Se afirma que $a - bi \in C$ es el conjugado de z , y se designa como \bar{z} .

Proposición A.1. Sean $w, z \in C$. Entonces, $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$ y $\overline{wz} = (\overline{w})(\overline{z})$.

Demostración. Sea $w = a + bi$ y $z = c + di$, entonces por las propiedades de cuerpo

$$\begin{aligned} \overline{(a + bi) + (c + di)} &= \overline{a + c + (b + d)i} \\ &= a + c - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= (\overline{a + bi}) + (\overline{c + di}) \end{aligned}$$

Y por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned} \overline{(a + bi) + (c + di)} &= \overline{ac + adi + bic + bidi} \\ &= \overline{ac + adi + bci - bd} \\ &= ac - bd - (ad + cb)i \\ &= ac + bdi - adi - cbi \\ &= (a - bi)(c - di) \\ &= (\overline{a + bi})(\overline{c + di}) \end{aligned}$$

Definición A.9. Sean $M_{n \times m}(C)$ y $M_{m \times n}(C)$. Entonces si $A \in M_{n \times m}(C)$ se dice que:

1. $A' \in M_{m \times n}(C)$ es la matriz transpuesta de A siempre y cuando $A'_{i,j} = A_{j,i}$
2. $\overline{A} \in M_{n \times m}(C)$ es la matriz conjugada de A siempre y cuando $(\overline{A})_{i,j} = \overline{A_{i,j}}$.
3. $A^* \in M_{m \times n}(C)$ es la matriz adjunta de A siempre y cuando $A^* = \overline{A'}$.

Proposición A.2. Sea $A, B \in M_{n \times m}(C)$, $C \in M_{m \times n}(C)$ y $z \in C$. Entonces:

1. $(A')' = A$;
2. $(AC)' = C'A'$;
3. $(A + B)' = A' + B'$; y
4. $(zA)' = zA'$

Demostración. Por la definición A.9 (1) se tiene que:

1. $(A')'_{i,j} = A'_{j,i} = A_{i,j}$ Por lo tanto, $(A')' = A$.
2. $(AC)'_{i,j} = (AC)'_{j,i} = \sum_{r=1}^m A_{j,r} C_{r,i} = \sum_{r=1}^m C'_{i,r} A'_{r,j} = (C'A')_{i,j}$,
 $\forall (i,j) \in N_n \times N_m$. Por lo tanto, $(AC)' = C'A'$.
3. $(A+B)'_{i,j} = (A+B)'_{j,i} = A_{j,i} + B_{j,i} = A'_{i,j} + B'_{i,j}$. Por lo tanto, $(A+B)' = A' + B'$.
4. $(zA)'_{i,j} = (zA)'_{j,i} = zA_{j,i} = zA'_{j,i}$. Por tanto, $(zA)' = zA'$.

Proposición A.3. Sea $A, B \in M_{n \times m}(C)$ y $z \in C$. Entonces, $(A+B)^* = A + B^*$ y $(zA)^* = \bar{z} A^*$.

Demostración. Por la proposición A.2 se tiene que $(A+B)' = A' + B'$. Además, por la proposición A.1

$$\begin{aligned} \overline{(A+B)'_{i,j}} &= \overline{A'_{i,j} + B'_{i,j}} \\ &= \overline{A'_{i,j}} + \overline{B'_{i,j}} \end{aligned}$$

Por otra parte, por la proposición A.1 y la definición A.9, $(zA)^*_{i,j} = \overline{(zA)'_{i,j}} = \overline{(zA)'_{j,i}} = \overline{zA_{j,i}} = \bar{z} \overline{A_{j,i}} = \underline{z} \overline{A'_{j,i}} = \bar{z} A^*_{i,j}$.

Definición A.10 (Producto interno). Sea V un espacio vectorial sobre C . Se afirma que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow C$ es el producto interior de V siempre que $\forall u, v, w \in V$ y $c \in C$ se cumple que:

1. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
2. $\langle cu, v \rangle = c \langle u, v \rangle$;
3. $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$; y
4. $\langle u, u \rangle > 0$ si $u \neq 0$

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en V , entonces se puede afirmar que $(\langle \cdot, \cdot \rangle, V)$ es un espacio producto interno.

Lema A.1. Sea $(\langle \cdot, \cdot \rangle, V)$ un espacio producto interno sobre C . Entonces $\langle 0, v \rangle = 0$ para todo $v \in V$.

Demostración. De la propiedad 1 de la definición A.10 se tiene:

$$\langle 0, v \rangle = \langle 0 + 0, v \rangle = \langle 0, v \rangle + \langle 0, v \rangle$$

siempre y cuando, $\langle 0, v \rangle = 0$

Proposición A.4. Sea $(\langle \cdot, \cdot \rangle, V)$ un espacio producto interno. Si $\langle v, v \rangle = 0$ entonces $v = 0$.

Demostración. Por el lema A.1 se sabe que $\langle v, v \rangle = 0$ está bien definida. Ahora, si se supone que $v \neq 0$ entonces por la propiedad 4 de la definición A.10 $\langle v, v \rangle > 0$, contradiciendo la hipótesis.

Teorema A.7. Sea V es un espacio producto interno sobre C . Si $M(\cdot): V \rightarrow R$ está definida como $M(a) = \sqrt{\langle a, a \rangle}$, entonces para todo $a, b \in V$ y $c \in C$,

1. $M(ca) = |c| M(a)$,
2. $M(a) > 0$ cuando $a \neq 0$;
3. $|\langle a, b \rangle| \leq M(a) M(b)$
4. $M(a + b) \leq M(a) + M(b)$

Demostración. Véase Hoffman y Kunze [1971: 273 y 277].

Definición A.11 (norma). Sea V un espacio vectorial sobre C . Se afirma que la función $\|\cdot\|: V \rightarrow R$ es una norma en V siempre que:

1. $\|v\| > 0, \forall v \in V / \{0\}$;
2. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
3. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \forall v \in V$ y $\forall \alpha \in C$; y
4. $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|, \forall v, u \in V$.

Si $\|\cdot\|$ es una norma en V , entonces se afirma que $(\|\cdot\|, V)$ es un espacio normado.

Teorema A.8. Sea $(\langle \cdot, \cdot \rangle, V)$ un espacio producto interno. Entonces $M(v) = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ es una norma sobre V .

Demostración. Las condiciones 1, 3 y 4 de la definición A.11 se siguen del teorema A.7, mientras que la condición 2 de la misma definición del lema A.1 y la proposición A.4.

Definición A.12 (norma inducida por producto interno). Sea $(\langle \cdot, \cdot \rangle, V)$ un espacio producto interno. Se afirma que la norma inducida por el producto interno en V es la función $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$.

Definición A.13 (distancia). Sea $(\|\cdot\|, V)$ un espacio norma-
do. Se afirma que la distancia inducida por una norma en V es la función $d(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $d(a, b) = \|a - b\|$.

Definición A.14. Sea $A \in M_n(C)$. Se dice que la función $tr(\cdot): M_n(C) \rightarrow C$ dada por $tr(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,i}$ es la traza de A .

Proposición A.5. Sean $A, B \in M_n(C)$, $C \in M_{n \times m}$, $D \in M_{m \times n}$ y $z \in C$. Entonces se cumplen las siguientes igualdades $tr(zA + B) = ztr(A) + tr(B)$ y $tr(CD) = tr(DC)$

Demostración.

$$\begin{aligned} tr(zA + B) &= \sum_{i=1}^n (zA + B)_{i,i} = \sum_{i=1}^n [(zA)_{i,i} + B_{i,i}] = \sum_{i=1}^n (zA)_{i,i} + \sum_{i=1}^n B_{i,i} = \sum_{i=1}^n zA_{i,i} + \sum_{i=1}^n B_{i,i} \\ &= z \sum_{i=1}^n A_{i,i} + \sum_{i=1}^n B_{i,i} = ztr(A) + tr(B) \\ tr(CD) &= \sum_{i=1}^n (CD)_{i,i} = \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^n C_{i,r} D_{r,i} = \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^n D_{r,i} C_{i,r} = \sum_{r=1}^m (DC)_{r,r} = tr(DC) \end{aligned}$$

Teorema A.9. Sea $M_{n \times m}(C)$. Entonces $\langle A, B \rangle = tr(AB^*)$ es un producto interno en $M_{n \times m}(C)$.

Demostración.

1. Sea $A, B \in M_{n \times m}(C)$ y $z \in C$. Entonces por la proposición A.5:

$$\begin{aligned} \langle z(A + B), C \rangle &= tr((z(A + B))C^*) \\ &= tr((zA)C^* + (zB)C^*) \\ &= ztr(AC^*) + ztr(BC^*) \\ &= z\langle A, C \rangle + z\langle B, C \rangle \end{aligned}$$

Como se cumple para un $z \in C$ arbitrario, tomando $z = 1 + 0i = 1$ se cumple la condición 1 de la definición A.10. Inclusive, como B es arbitrario, tomando $B = 0$ se cumple la condición 2 de la misma definición.

2. Sean $A, B \in M_{n \times m}(C)$, entonces por la proposición A.1 y la definición A.9:

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \text{tr}(AB^*) = \sum_{i=1}^n (AB^*)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m A_{i,r} \overline{B_{i,r}} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m \overline{B_{i,r}} \overline{A_{r,i}^*} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m \overline{B_{i,r} A_{r,i}^*} = \sum_{i=1}^n \overline{(BA^*)_{i,i}} = \sum_{i=1}^n (BA^*)_{i,i} \\ &= \overline{\langle B, A \rangle} \end{aligned}$$

Lo que comprueba la condición 3 de la definición A.10.

3. Sea $A \in M_{n \times m}$ no nula. Entonces $A_{p,q} \neq 0$ para algún $(p, q) \in N_n \times N_m$, que implica:

$$\begin{aligned} \langle A, A \rangle &= \text{tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^n (AA^*)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m A_{i,r} \overline{A_{i,r}} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m \text{Re}(A_{i,r})^2 + \text{Im}(A_{i,r})^2 \\ &\geq \text{Re}(A_{p,q})^2 + \text{Im}(A_{p,q})^2 > 0 \end{aligned}$$

Definición A.15 (norma de Frobenius). Se afirma que la función $\|\cdot\|_F : M_{n \times m}(C) \rightarrow R$ dada por

$$\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{tr}(AA^*)} = \sqrt{\text{tr}(A^*A)} \text{ xxviii}$$

es la norma de Frobenius en $M_{n \times m}$.

Definición A.16. Sea $A \in M_n(C)$. Entonces se dice que A es

1. Simétrica si $A_{i,j} \in R, \forall (i, j) \in N_n \times N_m$, y $A = A'$.
2. Hermitiana si $A = A^*$.
3. Ortogonal si $A_{i,j} \in R, \forall (i, j) \in N_n \times N_m$, y $AA' = A'A I_n$.

xxviii Esta igualdad es dada por la proposición A.5.

4. Normal si $A^*A = AA^*$.
5. Unitaria si $A^*A = AA^* = I_n$.
6. Regular si $\exists B \in M_n(C)$ tal que $AB = BA = I_n$, donde a B se le denomina inversa de A .
7. Semidefinida positiva si $x^*Ax \geq 0, \forall x \in C^n$.

Definición A.17 (valor propio). Sea V un espacio vectorial sobre el campo C . Se dice que $\lambda \in C$ es un valor propio de $A \in M_n(C)$ si $\exists \bar{v} \in V, \bar{v} \neq \bar{0}$, tal que $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$. En este caso, el vector \bar{v} asociado a λ se conoce como vector propio.

Además, se define a $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ como el polinomio característico de A . Asimismo, se afirma que la multiplicidad algebraica de λ , denotada como $m_a(\lambda)$, es la multiplicidad de λ como raíz de $p(\lambda)$.

Teorema A.10 (Shur). Sea $A \in M_n(C)$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de A ordenados de forma arbitraria y considerando su multiplicidad algebraica, entonces existen $U \in M_n$ unitaria y $\Sigma \in M_n$ triangular superior tales que $A = U \Sigma U^*$ y $\Sigma_{i,i} = \lambda_i, \forall i \in N_n$.

Demostración. Véase Antezana y Stojanoff [2009: 15].

Corolario A.10.1. Sea $A \in M_n(C)$ con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en un orden arbitrario y considerando su multiplicidad algebraica. Entonces

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Demostración. Por el teorema A.10, existen $U \in M_n$ unitaria y $\Sigma \in M_n$ triangular superior tales que $A = U \Sigma U^*$ y $\Sigma_{i,i} = \lambda_i, \forall i \in N_n$. Luego, por la proposición A.5 y la definición A.16 en su inciso 5 sobre la matriz unitaria,

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(U \Sigma U^*) = \text{tr}(\Sigma U^* U) = \text{tr}(\Sigma I_n) = \text{tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \Sigma_{i,i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Lema A.2. Sea $A \in M_n(C)$. Si $A_{i,j} \in R, \forall (i, j) \in N_n$, entonces $A^* = A'$.

Demostración. Debido a que $A_{i,j} \in R$, entonces $A_{i,j} = Re(A_{i,j}) = Re(A_{i,j}) + 0 * Im(A_{i,j})$.

Por consiguiente, $\overline{A_{i,j}} = Re(A_{i,j}) - 0 * Im(A_{i,j}) = Re(A_{i,j}) = A_{i,j}$. De lo cual se sigue que

$$A^*_{i,j} = \overline{A_{i,j}} = A_{j,i} = A_{j,i}, \forall i, j \in N_n.$$

\therefore Como lo anterior se cumple para todo $i, j \in N_n$, $A^* = A'$.

Lema A.3. Sea $A \in M_n(C)$. Si $A_{i,j} \in R, \forall (i, j) \in N_n$ y $A'A = AA'$, entonces A es normal.

Demostración. Como $A_{i,j} \in R, \forall (i, j) \in N_n \times N_m$, por el lema A.2, $A^* = A'$. Luego, como $A'A = AA'$, entonces $A^*A = AA^*$.

\therefore Por la definición A.16 (4), A es una matriz normal.

Teorema A.11. Sea $A \in M_{n \times m}(C)$ no nula. Si $A_{i,j} \in R, \forall (i, j) \in N_n \times N_m$, entonces $A'A$ es una matriz simétrica, hermitiana, normal y semidefinida positiva.

Demostración. A causa de la proposición A.2, $(A'A)' = A'(A')' = A'A$, por lo cual $A'A$ es simétrica. Además, como $(A'A)_{i,j} = \sum_{r=1}^n A'_{i,r} A_{r,j} = \sum_{r=1}^n A_{r,i} A_{r,j} \in R, \forall (i, j) \in N_n \times N_m$ y del lema A.2, entonces $(A'A)^* = (A'A)'$, por consiguiente $A'A$ es hermitiana.

Incluso, por el lema A.2 y la proposición A.2

$$\begin{aligned} (A'A)'(A'A) &= (A'(A')')(A'A) \\ &= (A'A)(A'A) \\ &= (A'A)(A'(A')') \\ &= (A'A)(A'A)' \end{aligned}$$

y debido al lema A.3, $A'A$ es una matriz normal. Luego, por la propiedad A.3, que A es no nula con $A_{u,v} = Re(A_{u,v}) + 0i$, y que para $z \in C$ no nulo, $\bar{z}z > 0$,^{XXIX} entonces

^{XXIX} Sea $z \in C$ no nulo. Entonces $\bar{z}z = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2 > 0$.

$$\begin{aligned}
x^*(A'A)x &= (A\bar{x})'Ax \\
&= (\overline{A\bar{x}})'Ax \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \overline{A_{ij}x_j} \right) \left(\sum_{j=1}^m A_{ij}x_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \overline{A_{ij}x_j} \right) \left(\sum_{j=1}^m A_{ij}x_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \overline{A_{ij}x_j} \right) \left(\sum_{j=1}^m A_{ij}x_j \right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$\therefore A'A$ es semipositiva definida.

Teorema A.12. Sea $A \in M_n(C)$. Si A es hermitiana y semi-definida positiva, entonces sus valores propios son todos reales no negativos.

Demostración. Véase Antezana y Stojanoff [2009: 29 y 39].

Definición A.18 (valor singular). Sea $A \in M_{n \times m}(R)$. Se afirma que los valores singulares de A son las raíces cuadradas de los valores propios de $A'A$ y se designan mediante $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, donde el orden es tal que $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_m$.

Teorema A.13. Sea $A \in M_{n \times m}(R)$. Si $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ son los valores singulares de A , entonces

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}$$

Demostración. La función $\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}$ está bien definida por los teoremas A.11 y A.12, y la definición A.18. El resto de la demostración es inmediata a partir del corolario A.10.1 y la definición A.15.

Definición A.19 (distancia de Frobenius). Sean $A, B \in M_{n \times m}(R)$. Se dice que la función $d_F(\cdot, \cdot): M_{n \times m}(R) \times M_{n \times m}(R) \rightarrow R$ dada por $d_F(A, B) = \|A - B\|_F$ es la distancia en el espacio $M_{n \times m}(R)$.

Teorema A.14 (descomposición en valores singulares). Sea $A \in M_{n \times m}(R)$ arbitraria con rango r y sean $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ sus valores singulares ordenados de mayor a menor. Entonces existen las matrices ortogonales $U \in M_n$ y $V \in M_m$, y una matriz diagonal Σ tales que

- i) $(\Sigma)_{ii} = \sigma_i$, si $i \leq r$ y 0 si $i > r$;
- ii) $A = U \Sigma V$

Demostración. Véase Lay, Lay y McDonald [2016: 419-420].

Corolario A.14.1 (equivalencia distancia de Frobenius). Sean $A, B \in M_{n \times m}(R)$. Entonces:

$$d_F(A, B) = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A_{i,j} - B_{i,j})^2}$$

Demostración. Por el lema A.2 $(A - B)^* = (A - B)'$, luego

$$\begin{aligned} d_F(A, B) &= \|A - B\|_F \\ &= \sqrt{\text{tr}((A - B)'(A - B))} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A - B)'_{j,i} (A - B)_{i,j}} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A - B)_{i,j} (A - B)_{i,j}} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A_{i,j} - B_{i,j})(A_{i,j} - B_{i,j})} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \end{aligned}$$

A.2. TEORÍA DE LA REALIZACIÓN

Definición A.20 (sistema dinámico [Casti, 1987]). Un sistema dinámico Σ es un concepto matemático definido por los siguientes axiomas:

- i) Existe un conjunto de tiempo T , un conjunto de estado X , un conjunto de valores de entrada U , un conjunto de funciones de entrada $\Omega = \{u: T \rightarrow U\}$, un conjunto de valores de salida Y , y un conjunto de funciones de salida $\Gamma = \{y: T \rightarrow Y\}$.
- ii) T es un subconjunto ordenado de números reales.
- iii) Ω satisface las condiciones:

a) $\Omega \neq \emptyset$

b) Un segmento de entrada $u(t)$, $t_1 < t \leq t_2$ en Ω está restringido a $(t_1, t_2) \cap T$. Si $u, u' \in \Omega$ y $t_1 \leq t \leq t_3$, entonces existe $u'' \in \Omega$ tal que $u''(t) = u(t)$, $t_1 \leq t < t_2$ y $u''(t) = u'(t)$, $t_2 \leq t < t_3$.

- iv) Existe una función de transición de estado

$$\psi : T^2 \times X \times \Omega \rightarrow X$$

cuyo valor es el estado $x(t) = \psi(t; \tau, x, u) \in X$, que se obtiene en el tiempo $t \in T$ del estado inicial $x(\tau) \in X$ en el tiempo inicial $\tau \in T$, bajo la acción de la entrada $u \in \Omega$. ψ tiene las siguientes propiedades:

a) ψ está bien definida para todo $t \geq \tau$ pero no necesariamente para todo $t < \tau$.

b) $\psi(t; t, x, u) = x$ para todo $t \in T$, $x \in X$, $u \in U$.

c) Para todo $t_1 < t_2 \leq t_3$, se tiene que $\psi(t_3; t_1, x, u) = \psi(t_3; t_2, \psi(t_2; t_1, x, u), u)$ para todo $x \in X$, $u \in U$.

d) Si $u, u' \in \Omega$ y $u(t) = u'(t)$, $\tau < t \leq \tau_2$, entonces $\psi(\tau_2; \tau, x, u) = \psi(\tau_2; \tau, x, u')$.

- v) Existe una función de salida legible $\eta : T \times X \rightarrow Y$ que asigna la salida $y(t) = \eta(t, x(t))$ en el tiempo t .

Definición A.21 (equivalencia de sistemas). Sean (F, G, H) y $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H})$ las RI de sendos sistemas MDLIF. Se dice que los sistemas representados por (F, G, H) y $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H})$ son equivalentes

algebraicos siempre y cuando $\exists Z \in M_{q \times q}(R)$ no singular, tal que

$$\bar{F} = Z^{-1}FZ \quad \bar{G} = Z^{-1}G \quad \bar{H} = HZ$$

Definición A.22 (matriz de controlabilidad). Sea $j \in N$ arbitrario y sea (F, G, H) la RI de un sistema MDLIF, donde $F \in M_{q \times q}(R)$, $G \in M_{q \times r}(R)$ y $H \in M_{q \times q}(R)$. Se dice que

$$C_j = (G|F G| \cdots |F^{j-1} G)$$

es la j -matriz de controlabilidad $q \times jr$ del sistema. Y se dice que $\alpha \in N$ es el índice de controlabilidad del sistema, siempre y cuando sea el valor natural más pequeño tal que $\text{rango}(C_\alpha) = \text{rango}(C_{\alpha+1})$.

Definición A.23 (matriz de observabilidad). Sea $j \in N$ arbitrario y sea (F, G, H) la RI de un sistema MDLIF, donde $F \in M_{q \times q}(R)$, $G \in M_{q \times r}(R)$ y $H \in M_{p \times q}(R)$. Se dice que

$$O_j = \begin{pmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{j-1} \end{pmatrix}$$

es la j -matriz de observabilidad $jp \times q$ del sistema. Y se dice que $\beta \in N$ es el índice de observabilidad del sistema, siempre y cuando sea el valor natural más pequeño tal que $\text{rango}(O_\beta) = \text{rango}(O_{\beta+1})$.

Definición A.24 (matriz de Hankel con entradas matriciales). Sea la sucesión L_N con elementos en $M_{\mu \times \eta}$, y sean $n, m \in N$. La matriz de Hankel con entradas matriciales (MHM) de L_N , de orden (n, m) y dimensión $n\mu \times m\eta$ es la función $H_{n,m}(L_N): N_n \times N_m \rightarrow \{L_N\}$ definida como

$$H_{n,m}(L_N)(i, j) = L_{i,j} = L(i, j - 1) \quad (1)$$

donde a $L_{i,j}$ se denomina la *entrada matricial* (i, j) .

Se define el *bloque fila* $i \in N_n$ como la función (1) cuando se fija $i \in N_n$. En caso de fijar $j \in N_m$ se dice que la función (1) es el *bloque columna* j .

Sea $[\cdot]$ la *función techo*.^{xxx} La *entrada escalar* $(r, s) \in N_{n\mu} \times N_{m\eta}$ de $H_{n,m}(L_N)$ está definida como $(H_{n,m})_{r,s} = (L_{i_r, j_s})_{w_r, w_s}$, donde $i_r = \lceil \frac{r}{\mu} \rceil$, $j_s = \lceil \frac{r}{\eta} \rceil$, $w_r = r - (i_r - 1)\mu$ y $w_s = s - (j_s - 1)\eta$.

Lema A.4. Sea la sucesión de matrices J_N con elementos en $M_{\mu \times \eta}$. Para toda $n, m \in N$, $p \in N_{n-1}$ y $q \in N_{m-1}$ se cumple que

$$H_{p,q}(J_N) = (H_{n,m}(J_N))_{1:p\mu, 1:q\eta} \quad (2)$$

Demostración. Por la definición A.24, para $(r, s) \in N_{p\mu} \times N_{q\eta}$ arbitrario,

$$\begin{aligned} (H_{p,q})_{r,s} &= (L_{i_r, j_s})_{w_r, w_s} \\ &= (L(i_r + j_s - 1))_{w_r, w_s} \\ (H_{n,m})_{r,s} &= (L_{i'_r, j'_s})_{w'_r, w'_s} \\ &= (L(i'_r + j'_s - 1))_{w'_r, w'_s} \end{aligned}$$

Pero como $i_r = \lceil \frac{r}{\mu} \rceil = i'_r$ y $j_s = \lceil \frac{r}{\eta} \rceil = j'_s$, entonces $w_r = r - (i_r - 1)\mu = r - (i'_r - 1)\mu = w'_r$ y $w_s = s - (j_s - 1)\eta = r - (j'_r - 1)\mu = w'_s$ por consiguiente $(L(i_r + j_s - 1))_{w_r, w_s} = (L(i'_r + j'_s - 1))_{w'_r, w'_s}$. Con lo cual se tiene que

$$(H_{p,q})_{r,s} = (H_{n,m})_{r,s}$$

para cualquier $(r, s) \in N_{p\mu} \times N_{q\eta}$.

$$\therefore H_{p,q}(J_N) = (H_{n,m}(J_N))_{1:p\mu, 1:q\eta}$$

Teorema A.15 (realización mínima). (a) La sucesión L_N con elementos en $M_{p \times q}$, es realizable si y solo si existen enteros positivos α, β y n tales que

$$\text{rango}(H_{\beta, \alpha}(L_N)) = \text{rango}(H_{\beta+1, j}(L_N)) = n \quad \forall j \in N_{\alpha; \infty} \quad (3)$$

^{xxx} $[\cdot] : R \rightarrow Z$ definida como $[x] = \min\{n \in Z : x \leq n\}$.

(b) Si L_N es realizable, entonces n es la dimensión de su realización mínima.

(c) Si L_N es realizable y β, α son los primeros enteros para los cuales (4) es verdad, entonces β es el índice de observabilidad y α es el índice de controlabilidad de cualquier realización mínima de L_N .

Demostración. (a) (\Leftarrow) Esta demostración es en sí un algoritmo para generar una realización. En su desarrollo remarkamos con un número romano el paso correspondiente del algoritmo.

I. Sean α, β y n enteros positivos tales que

$$\text{rango}(H_{\beta,\alpha}(L_N)) = \text{rango}(H_{\beta+1,j}(L_N)) = n \forall j \in N_{\alpha:\infty}$$

II. Sean r_1, r_2, \dots, r_n las posiciones de las primeras n filas independientes de $H_{\beta,\alpha}$. Se definen $\Lambda\alpha \in M_{n \times \alpha q}$ y $\Lambda^*\alpha \in M_{n \times \alpha q}$ como las matrices compuestas por las filas r_1, r_2, \dots, r_n de $H_{\beta,\alpha}$, y por las filas $r_1 + p, r_2 + p, \dots, r_n + p$ de $H_{\beta,\alpha+1,\alpha}$, respectivamente.

III. Sean s_1, s_2, \dots, s_n las posiciones de las primeras n columnas independientes de $\Lambda\alpha$. Se definen a $A \in M_{n \times n}$, $A^* \in M_{n \times n}$, $A_1 \in M_{p \times n}$ y $A_2 \in M_{n \times q}$ como las matrices compuestas por las columnas s_1, s_2, \dots, s_n de $\Lambda\alpha$, por las columnas s_1, s_2, \dots, s_n de $\Lambda^*\alpha$, por las columnas s_1, s_2, \dots, s_n de $H_{1,\alpha}$ y por las primeras q columnas de $\Lambda\alpha$.

Un resultado indispensable para la última parte de la demostración es la siguiente.

Proposición A.6. Sean r_1, r_2, \dots, r_n las posiciones de las primeras n filas independientes de $H_{\beta,\alpha}$, sea $j \in N$ y sean Λ_j y Λ_j^* las matrices compuestas por las filas r_1, r_2, \dots, r_n de $H_{\beta,j}$ y por las filas $r_1 + p, r_2 + p, \dots, r_n + p$ de $H_{\beta+1,j}$,

respectivamente. Entonces, para toda $j \in N$ se cumplen las siguientes igualdades:^{XXXI}

$$A^* A^{-1} \Lambda_j = \Lambda_j^* \quad (4)$$

$$A_1 A^{-1} \Lambda_j = H_{i,j} \quad (5)$$

$$(A_2 \Lambda_j^*) = \Lambda_{j+1} \quad (6)$$

Demostración. Sea W el conjunto de las columnas de A . Entonces, W es una base del espacio columna de Λ_j , para toda $j \in N_{\alpha:\infty}$. Para demostrarlo, se observa que Λ_α tiene rango fila n ,^{XXXII} entonces por el teorema A.3, su rango columna es n . Y como W es el conjunto de n columnas independientes de Λ_α , entonces W es una de sus bases. Supóngase que para $k \in N_{\alpha:\infty}$, W es base del espacio columna de Λ_k . Entonces, por el teorema A.3, Λ_k tiene rango fila n y sus n filas son una base de su espacio fila.^{XXXIII} Por consiguiente, las n filas de Λ_{k+1} son una base de su espacio fila.^{XXXIV} Y por el teorema A.3 el rango columna de Λ_{k+1} es n , lo que concluye la demostración.

Además, si a lo anterior se aúna que cada columna de Λ_j , $j \in N_\alpha$, es combinación lineal de W ,^{XXXV} se sigue que:

$$(\Lambda_j)_{:,u} = \sum_{k=1}^n C_{(u,k)} (\Lambda_\alpha)_{:,s_k} \quad (7)$$

^{XXXI} Como las columnas de A son independientes y el rango de columnas es igual al de filas (teorema 24 en Hoffman y Kunze [1971: 114]), entonces las filas de A son independientes. Por tanto, A es inversible (corolario 3 en Hoffman y Kunze [1971: 46]).

^{XXXII} Sus n filas son independientes y generan su espacio de filas.

^{XXXIII} Suponiendo que no, serían dependientes. Lo que implica que un número de filas menor a n genera el espacio de filas de Λ_k , contradiciendo el corolario A.2.1 (a).

^{XXXIV} Suponiendo lo contrario serían dependientes. Luego $\sum_{i=1}^n ai(\Lambda_{k+1})_{i,:} := \vec{0}$ con $a_i \neq 0$, para algún $i \in N_n$.

Sin embargo, como $\sum_{i=1}^n ai(\Lambda_{k+1})_{i,1:p_k} = \sum_{i=1}^n ai(\Lambda_k)_{i,:} = 0$ con $a_i \neq 0$ para algún $i \in N_n$, llegamos a una contradicción puesto que las filas de Λ_k son independientes.

^{XXXV} Como las columnas de Λ_j , $j \in N_\alpha$, son columnas de Λ_α y como W es una base del espacio columna de Λ_α , entonces las columnas de Λ_j , $j \in N_\alpha$ son combinación lineal de W .

para toda columna $u \in N_{jp}$ de \wedge_j , y para cualquier $j \in N$. Luego, como

$$\begin{aligned} I_n &= A^{-1}A \\ &= \begin{pmatrix} A_{1,:}^{-1} \\ A_{2,:}^{-1} \\ \vdots \\ A_{n,:}^{-1} \end{pmatrix} ((\Lambda_\alpha)_{:,s_1} (\Lambda_\alpha)_{:,s_2} \cdots (\Lambda_\alpha)_{:,s_n}) \end{aligned}$$

es decir, $A_{i,:}^{-1}(\Lambda_\alpha)_{:,s_k}$ es 1 si $i = k$ y 0 cuando $i \neq k$, se tiene que

$$\begin{aligned} A^{-1}A_j &= \begin{pmatrix} A_{1,:}^{-1} \\ A_{2,:}^{-1} \\ \vdots \\ A_{n,:}^{-1} \end{pmatrix} ((\Lambda_j)_{:,1} \cdots (\Lambda_j)_{:,s_1} \cdots (\Lambda_j)_{:,s_n} \cdots (\Lambda_j)_{:,jq}) \\ &= \begin{pmatrix} C_{(1,s_1)} \cdots 1 \cdots C_{(s_2,s_1)} \cdots C_{(s_n,s_1)} \cdots C_{(jq,s_1)} \\ C_{(1,s_2)} \cdots C_{(s_1,s_2)} \cdots 1 \cdots C_{(s_n,s_2)} \cdots C_{(jq,s_2)} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ C_{(1,s_n)} \cdots C_{(s_1,s_n)} \cdots C_{(s_2,s_n)} \cdots 1 \cdots C_{(jq,s_n)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

Sea S el conjunto de las columnas s_1, \dots, s_n de $H_{\beta+1,\alpha}$. Entonces S es una base del espacio columna de $(H_{\beta+1,j})_{:,u}$, $\forall j \in N_{\alpha;\infty}$.^{XXXVI} Además, las columnas de $(H_{\beta+1,j})_{:,u}$, $j < \alpha$ son columnas de $H_{\beta+1,\alpha}$ y, por tanto, son combinaciones lineales de S . Entonces, cualquier columna $u \in N_{jq}$ de $(H_{\beta+1,j})_{:,u}$, con cualquier $j \in N$, garantiza

$$(H_{\beta+1,j})_{:,u} = \sum_{k=1}^n d_{(u,s_k)} (H_{\beta+1,\alpha})_{ri,s_k} \quad (9)$$

^{XXXVI} Por hipótesis $\text{rango}(H_{\beta+1,j}) = n$, $\forall j \in N_{\alpha;\infty}$, entonces el rango del espacio columna de $H_{\beta+1,j}$ es n , $\forall j \in N_{\alpha;\infty}$. Si S no es base de algún espacio columna de $H_{\beta+1,j^*}$, entonces es dependiente o no genera tal espacio.

Si es dependiente, $\sum_{i=1}^n a_i (H_{\beta+1,j^*})_{:,s_i} = \bar{0}$ con algún $a_i \neq 0$, implicando $\sum_{i=1}^n a_i (\Lambda_j)_{:,s_i} = \bar{0}$ con algún $a_i \neq 0$, una contradicción. Así S no genera tal espacio y $\exists \bar{y}$ del espacio columna que no es combinación lineal de S . Entonces, $S \cup \{\bar{y}\}$ es independiente con $n + 1$ elementos, lo que contradice el corolario A.2.1 (a). Luego, S cumple ambas condiciones, por lo tanto, es una base.

Luego, por definición de $\wedge_j, \forall j \in N$, el elemento de la columna $(\Lambda_j)_{:,u}$ en la coordenada i es el elemento de la columna $(H_{\beta+1,j})_{:,u}$ en la coordenada $r_i, \forall i \in N_n$. Entonces, de (7) y (9) se tiene:

$$\sum_{k=1}^n c_{(u,s_k)}(\Lambda_\alpha)_{i,s_k} = \sum_{k=1}^n d_{(u,s_k)}(H_{\beta+1,\alpha})_{ri,s_k}$$

y como también $(\Lambda_\alpha)_{i,s_k} = (H_{\beta+1,\alpha})_{ri,s_k}, \forall i, k \in N_n$,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^n c_{(u,s_k)}(\Lambda_\alpha)_{i,s_k} - \sum_{k=1}^n d_{(u,s_k)}(H_{\beta+1,\alpha})_{ri,s_k} \\ &= \sum_{k=1}^n c_{(u,s_k)}(\Lambda_\alpha)_{i,s_k} - \sum_{k=1}^n d_{(u,s_k)}(\Lambda_\alpha)_{i,s_k} \\ &= \sum_{k=1}^n (c_{(u,s_k)} - d_{(u,s_k)})(\Lambda_\alpha)_{i,s_k} \end{aligned}$$

Pero como esto se cumple para toda $i \in N_n$, entonces

$$\sum_{k=1}^n (c_{(u,s_k)} - d_{(u,s_k)})(\Lambda_\alpha)_{i,s_k} = \bar{0}$$

y como W es independiente, $c_{(u,s_k)} - d_{(u,s_k)} = 0, \forall k \in N_n$, es decir, $c_{(u,s_k)} = d_{(u,s_k)}, \forall k \in N_n$, y por las igualdades (8) y (9), y que por definición de $\wedge_j, \forall j \in N$, el elemento de la columna $(\Lambda_j^*)_{:,u}$ en la coordenada i es el elemento de la columna $(H_{\beta+1,j})_{:,u}$ en la coordenada $r_i + p, \forall i \in N_n$, se sigue que

$$\begin{aligned} A^*A^{-1}\Lambda_j &= ((\Lambda_j^*)_{:,s_1} (\Lambda_j^*)_{:,s_2} \cdots (\Lambda_j^*)_{:,s_n}) A^{-1}\Lambda_j \\ &= \left(\sum_{k=1}^n c_{(1,s_k)}(\Lambda_j^*)_{:,s_k} \cdots \sum_{k=1}^n c_{(s_m,s_k)}(\Lambda_j^*)_{:,s_k} \cdots \sum_{k=1}^n c_{(j_q,s_k)}(\Lambda_j^*)_{:,s_k} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n d_{(1,s_k)}(\Lambda_j^*)_{:,s_k} \cdots \sum_{k=1}^n d_{(s_m,s_k)}(\Lambda_j^*)_{:,s_k} \cdots \sum_{k=1}^n d_{(j_q,s_k)}(\Lambda_j^*)_{:,s_k} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n d_{(1,s_k)} \begin{pmatrix} (H_{\beta+1,j})_{r_1+p,s_k} \\ \vdots \\ (H_{\beta+1,j})_{r_n+p,s_k} \end{pmatrix} \cdots \sum_{k=1}^n d_{(j_k,s_k)} \begin{pmatrix} (H_{\beta+1,j})_{r_1+p,s_k} \\ \vdots \\ (H_{\beta+1,j})_{r_n+p,s_k} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\begin{pmatrix} (H_{\beta+1,j})_{r_1+p,1} \\ \vdots \\ (H_{\beta+1,j})_{r_n+p,1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} (H_{\beta+1,j})_{r_1+p,s_m} \\ \vdots \\ (H_{\beta+1,j})_{r_n+p,s_m} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} (H_{\beta+1,j})_{r_1+p,jq} \\ \vdots \\ (H_{\beta+1,j})_{r_n+p,jq} \end{pmatrix} \right) \\
&= ((\Lambda_j^*)_{:,1} \cdots (\Lambda_j^*)_{:,s_1} \cdots (\Lambda_j^*)_{:,s_n} \cdots (\Lambda_j^*)_{:,jq}) \\
&= \Lambda_j^*
\end{aligned}$$

para toda $j \in N$, lo cual demuestra la igualdad (4) de la proposición. Además,

$$\begin{aligned}
A_1 A^{-1} \Lambda_j &= ((H_{1,\alpha})_{:,s_1} (H_{1,\alpha})_{:,s_2} \cdots (H_{1,\alpha})_{:,s_n}) A^{-1} \Lambda_j \\
&= \left(\sum_{k=1}^n c_{(1,s_k)}(H_{1,\alpha})_{:,s_k} \cdots \sum_{k=1}^n c_{(s_m,s_k)}(H_{1,\alpha})_{:,s_k} \cdots \sum_{k=1}^n c_{(jq,s_k)}(H_{1,\alpha})_{:,s_k} \right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^n d_{(1,s_k)}(H_{1,\alpha})_{:,s_k} \cdots \sum_{k=1}^n d_{(s_m,s_k)}(H_{1,\alpha})_{:,s_k} \cdots \sum_{k=1}^n d_{(jq,s_k)}(H_{1,\alpha})_{:,s_k} \right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^n d_{(1,s_k)}(H_{\beta+1,\alpha})_{1:p,s_k} \cdots \sum_{k=1}^n d_{(jq,s_k)}(H_{\beta+1,\alpha})_{1:p,s_k} \right) \\
&= ((H_{\beta+1,\alpha})_{1:p,1} \cdots (H_{\beta+1,\alpha})_{1:p,s_m} \cdots (H_{\beta+1,\alpha})_{1:p,jq}) \\
&= ((H_{1,\alpha})_{:,1} \cdots (H_{1,\alpha})_{:,s_m} \cdots (H_{1,\alpha})_{:,jq}) \\
&= H_{1,j}
\end{aligned}$$

para toda $j \in N$, que demuestra la igualdad (5) de la proposición.

Por último, como

$$A_2 = (\Lambda_\alpha)_{:,1;q}, \text{ y } (\Lambda_\alpha)_{i,1;q} = (H_{\beta,\alpha})_{r_i,1;q} = (H_{\beta,j+1})_{r_i,1;q} = (\Lambda_{j+1})_{i,:}, \\
\forall i \in N_n, \text{ entonces}$$

$$A_2 = (\Lambda_{j+1})_{:,1;q} \quad (10)$$

Luego, por las definiciones A.24 y la de Λ_j^* , y debido al lema A.4, para cualquier $(\alpha, b) \in N_n \times N_{jq}$

$$\begin{aligned}
(\Lambda_j^*)_{\alpha,b} &= (H_{\beta+1,j})_{r_{\alpha+p},b} \\
&= (H_{\beta+1,j+1})_{r_{\alpha+p},b} \\
&= (L_{\alpha',b'})_{w_{r_{\alpha+p}},w_b} \\
&= (L(\alpha' + b' - 1))_{w_{r_{\alpha+p}},w_b}
\end{aligned}$$

Pero como $\beta+1 \geq a' = \lceil \frac{r_{a+p}}{p} \rceil = 1 + \lceil \frac{r_a}{p} \rceil \geq 2$ y $b' = \lfloor \frac{b}{q} \rfloor \leq \lfloor \frac{jq}{q} \rfloor = \lfloor j \rfloor = j < j+1$, entonces la entrada matricial $L_{a'-1, b'+1}$ de $H_{\beta, j+1}$ está bien definida, por lo que

$$\begin{aligned}
 (L(a' + b' - 1))_{w_{r_{a+p}}, w_b} &= (L(a' + 0 + b' - 1))_{w_{r_{a+p}}, w_b} \\
 &= (L(a' + (-1 + 1) + b' - 1))_{w_{r_{a+p}}, w_b} \\
 &= (L(a' - 1) + (b' + 1) - 1)_{w_{r_{a+p}}, w_b} \\
 &= (L_{a'-1, b'+1})_{w_{r_a}, w_{b+q}} \\
 &= (H_{\beta+1, j+1})_{r_a, b+q} \\
 &= (\Lambda_{j+1})_{a, b+q}
 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\Lambda_j^* = (\Lambda_{j+1})_{:, q+1: (j+1)q} \quad (11)$$

\therefore De las igualdades en (10) y (11), se demuestra la igualdad (6) de la proposición.

IV. Sean las matrices $\mathbf{F} = A^* A^{-1}$, $\mathbf{G} = A_2$ y $\mathbf{H} = A_1 A^{-1}$. Entonces, por las igualdades (4), (5) y (6),

$$A_1 A^{-1} \Lambda_s = \begin{cases} (HG | HFA_{s-1}), & \text{si } 1 < s \\ HG (= HA_2), & \text{si } s = 1 \end{cases}$$

Además de que $\forall j \in N$

$$\begin{aligned}
 H_{1,j} &= (HFA_{j-1}) = (HFG | HFA_{j-2}^*) = (HFG | HF^2 \Lambda_{j-2}) = \dots \\
 &= (HF^{k-1} \Lambda_{j-k}^*) = (HF^k \Lambda_{j-k}) = \dots \\
 &= (HF^{j-2} \Lambda_1^*) = (HF^{j-1} \Lambda_1) \\
 &= (HF^{j-1} G)
 \end{aligned}$$

Y ya que por la definición A.24, $H_{1,j} = (L_{1,1} \dots L_{1,j}) = (L(1) \dots L(j))$, $\forall j \in N$, por consiguiente:

$$L(j) = HF^{j-1} G$$

para cualquier $j \in N$

Proposición A.7. Sea $a_0 = 1$, $a_1 = -3$ y $a_2 = 3$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^2 a_i \frac{(n+i)(n+i+1)}{2} = \frac{(n+3)(n+4)}{2} \quad (1)$$

Demostración. Para 1 se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 a_i \frac{(1+i)(1+i+1)}{2} &= \frac{(1)(1+1)}{2} - 3 \frac{(1+1)(1+1+1)}{2} + 3 \frac{(1+2)(1+2+1)}{2} \\ &= \frac{2 - 18 + 36}{2} \\ &= \frac{2 - 18 + 36}{2} \\ &= \frac{20}{2} \\ &= \frac{(4)(5)}{2} \\ &= \frac{(1+3)(1+4)}{2} \end{aligned}$$

Sea k cualquier natural que cumple con la igualdad (1), entonces $k+1$, como se ve debajo, también la respeta. Por tanto, todo $n \in \mathbb{N}$ sustenta la igualdad anterior.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 a_i \frac{((k+1)+i)((k+1)+i+1)}{2} &= \sum_{i=0}^2 a_i \frac{((k+i)+1)((k+i+1)+1)}{2} \\ &= \sum_{i=0}^2 a_i \frac{(k+i)(k+i+1) + (k+i+1) + (k+i) + 1}{2} \\ &= \sum_{i=0}^2 a_i \frac{(k+i)(k+i+1)}{2} + \sum_{i=0}^2 a_i \frac{2(k+i+1)}{2} \end{aligned}$$

y, a causa de la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} &= \frac{(k+3)(k+4)}{2} + \frac{2(k+1) - 6(k+2) + 6(k+3)}{2} \\ &= \frac{(k+3)((k+4) + 2(k+4))}{2} \\ &= \frac{(k+4)((k+3) + 2)}{2} \\ &= \frac{((k+1)+3)((k+1)+4)}{2} \end{aligned}$$

APÉNDICE B
REALIZACIÓN PARCIAL ESTOCÁSTICA

Definición B.1 (factorización). Sea la sucesión G_N , con elementos en $M_{\mu \times \eta}$, se dice que *factorizar la matriz* $H_{n,m}(G_N)$ es generar las matrices $P_{n,n} \in It_{n\mu}$, cuya diagonal principal está compuesta por unos, y $Q_{n,m} \in M_{n\mu \times m\eta}$:

$$P_{n,n} = \begin{pmatrix} 1 & & \ddots & & \\ & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \\ p_{n\mu,1} & \dots & p_{n\mu,n\mu-1} & & 1 \end{pmatrix}; \text{ y } Q_{n,m} = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \dots & q_{1,m\eta} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \dots & q_{2,m\eta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n\mu,1} & q_{n\mu,2} & \dots & q_{n\mu,m\eta} \end{pmatrix}$$

tales que $H_{n,m} = P_{n,n}Q_{n,m}$. Por *algoritmo de factorización* (AF) se entenderá la sucesión de pasos para *factorizar* la matriz $H_{n,m}(G_N)$, los cuales se definen a continuación:

1. Definir $(Q_{n,m})_{1,:} = (H_{n,m})_{1,:}$;
2. Determinar la condición:
 - 2.1. Si $H_{n,m}$ tiene solo una fila, se define $P_{n,n} = [1]$, y $Q_{n,m} = (H_{n,m})_{1,:}$;
 - 2.1.1. Fin.
 - 2.2. Si $H_{n,m}$ tiene más de una fila, se define $i = 1$;
3. Si $(Q_{n,m})_{i,:} \neq \bar{0}$, hallar la primera columna j_i de $(Q_{n,m})_{i,:}$ tal que $q_{i,j_i} \neq 0$ y definir $q_{s,j_i} = 0, \forall s \in N_{i+1:n\mu}$;
4. Determinar $P_{u+i,i}$ como^{XXXVII}

$$P_{u+i,i} = \frac{(H_{n,m})_{u+i,j_i} - (\sum_{s=1}^{i-1} p_{u+i,s} q_{s,j_i})}{q_{i,j_i}}$$

para toda $u \in N_{n\mu-i}$;

^{XXXVII} Esta expresión es equivalente a $(H_{n,m})_{u+i,j_i} = (P_{n,m})_{u+i,:} \cdot (Q_{n,m})_{:,j_i} = \sum_{s=1}^{n\mu} p_{u+i,s} q_{s,j_i} = 0$. Además, está bien definida por el inciso 3, $q_{ij_i} \neq 0$.

5. Determinar $q_{i+1,j}$ como^{XXXVIII}

$$q_{i+1,j} = (H_{n,m})_{i+1,j} - \sum_{s=1}^{i-1} p_{i+1,s} q_{s,j}$$

para todo $j \in N_{mn} / \{j_r : \forall r \in N_i\}$,

6. Determinar la condición:

- 6.1. Si $(Q_{n,m})_{i+1,:} = \bar{0}$, entonces con los valores obtenidos en las i repeticiones procedentes del AF, y haciendo $(Q_{n,m})_{i+1+k,:} = \bar{0}, \forall r \in N_{n\mu-(i+1)}$, se conforman las matrices $P_{n,n}$ y $Q_{n,m}$, y se concluye.
- 6.2. Si $H_{n,m}$ tiene solo $i+1$ filas, entonces con los valores obtenidos en las i repeticiones procedentes del AF se conforman las matrices $P_{n,n}$ y $Q_{n,m}$ y se concluye.
- 6.3. Si $H_{n,m}$ tiene más de $i+1$ filas y $(Q_{n,m})_{i+1,:} \neq \bar{0}$, entonces se define $i=i+1$, es decir, se toma una nueva i igual a la i inmediatamente anterior, más 1, y se repite el AF desde el inciso 3.

Definición B.2. Sea J_N con elementos en $M_{\mu \times \eta}$, y sean $P_{n,n}$ y $Q_{n,m}$ las matrices que resultan al factorizar $H_{n,m}(J_N)$ según la definición B.1, y sea $k \in N_{(n-1)\mu}$. Se define $P'_{k,k} \in M_{k \times k}, P^*_{k,k} \in M_{k \times k}, G_k \in M_{k \times n}$ y $H_k \in M_{\mu \times k}$,

$$\begin{aligned} P'_{k,k} &= (P_{n,n})_{1:k,1:k}; & P^*_{k,k} &= (P_{n,n})_{\mu+1:\mu+k,1:k}; \\ G_k &= (Q_{n,m})_{1:k,1:n}; & H_k &= (P_{n,n})_{1:\mu,1:k}; & F_k &= (P'_{k,k})^{-1} P^*_{k,k} \end{aligned}$$

Lema B.1. Sea J_N con elementos en $M_{\mu \times \eta}$. Si se cumple que rango $H_{n,m}(J_N) = k$, entonces la matriz $Q_{n,m}$ generada por el AF de la definición B.1 tiene sus últimas $n\mu - k$ filas nulas.

Demostración. Como la matriz $P_{n,n}$ es triangular inferior, entonces su determinante es igual a la multiplicación de los elementos en su diagonal principal, que es 1, por lo cual tiene inversa.

^{XXXVIII} Esta expresión es equivalente a $(H_{n,m})_{i+1,j} = (P_{n,m})_{i+1,:} \cdot (Q_{n,m})_{:,j} = \sum_{s \in N_{mn}} p_{i+1,s} q_{s,j}$. Para ello se considera que $P_{n,n} \in It_{n\mu}$, con unos en su diagonal principal. Esto implica que $\sum_{s=i+2}^{n\mu} p_{i+1,s} q_{s,j} = 0$ y $p_{r+1,i+1} = 1$.

Por consiguiente, $k = \text{rango } H_{n,m} = \text{rango } P_{n,n} Q_{n,m} = \text{rango } Q_{n,m}$. Luego las primeras k filas de $Q_{n,m}$ deben ser no nulas; en caso contrario, existe $s \in N_k$ tal que $(Q_{n,m})_{s,:} = \bar{0}$, pero por el paso 6 de la definición B.1, $(Q_{n,m})_{s+k,:} = \bar{0}, \forall k \in N_{n\mu-k}$, por consiguiente, solo existen $k-1$ filas no nulas en $Q_{n,m}$, lo que contradice que su rango sea k .

Ahora, si se prueba que la fila $(Q_{n,m})_{k+1,:} = \bar{0}$, por el paso 6 de la definición B.1, entonces $(Q_{n,m})_{k+1+t,:} = \bar{0} \forall t \in N_{n\mu-(k+1)}$, terminando la demostración.

Si se supone que la fila $k+1$ es no nula, entonces se tiene $k+1$ filas no nulas y, por la definición B.1, la fila $r \in N_{k+1}$ tiene la columna j_r no nula, y $j_r \neq j_s, \forall r, s \in N_{k+1}$ con $r \neq s$.

Por consiguiente, si $\sum_{r=1}^{k+1} \lambda_r (Q_{n,m})_{r,:} = 0, \lambda_r \in R$, entonces para cada $s \in N_{k+1}$,

$$\sum_{r=1}^k \lambda_r q_{r,j_s} = \lambda_s q_{s,j_s}, j_s = 0$$

siempre y cuando $\lambda_s = 0, \forall s \in N_{k+1}$, o lo que es lo mismo, que las primeras $k+1$ filas son independientes, lo que contradice que $\text{rango } Q_{n,m} = k$. Por tanto, la fila $k+1$ debe ser nula.

Lema B.2. Sea J_N con elementos en $M_{\mu \times \eta}$, y sean $n', m', n, m, \in N$ tales que $n' \geq n$ y $m' \geq m$. Al aplicar el AF en la definición B.1 a $H_{n,m}(J_N)$ y $H_{n',m'}(J_N)$, las matrices obtenidas $P_{n,n}$ y $Q_{n,m}$ y, respectivamente, son tales que

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= (P_{n',n'})_{1:n\mu,1:n\mu} \\ Q_{n,m} &= (Q_{n',m'})_{1:n\mu,1:mn} \end{aligned}$$

Demostración. Por la definición B.1 y el lema A.4 se sigue que

$$P_{n,n} Q_{n,m} = H_{n,m} = (H_{n',m'})_{1:n\mu,1:mn} = (P_{n',n'})_{1:n\mu,1:n\mu} (Q_{n',m'})_{1:n\mu,1:mn}$$

Por consiguiente, $\forall (i, j) \in N_{n\mu} \times N_{mn}$

$$\sum_{r=1}^{n\mu} p_{i,r} q_{r,j} = \sum_{r=1}^{n\mu} p'_{i,r} q'_{r,j} \quad (1)$$

Además, se tiene que

$$(Q_{n,m})_{1,:} = (H_{n,m})_{1,:} = (H_{n',m'})_{1,1:mn} = (Q_{n',m'})_{1,1:mn} \quad (2)$$

Se probará por inducción que para toda $u \in N_{n\mu-1}$,

$$(Q_{n,m})_{u+1,:} = (Q_{n',m'})_{u+1,1:mn}; \text{ y } (P_{n,n})_{:,u} = (P_{n',n'})_{1:n\mu,u} \quad (3)$$

Sea $u = 1$, y debido a (2), los primeros elementos no nulos de $(Q_{n,m})_{1,:}$ y $(Q_{n',m'})_{1,1:mn}$ están en la misma columna k_1 , y son tales que $q_{1,k_1} = q'_{1,k_1}$, además, por el AF, $q_{s,k_1} = q'_{s,k_1} = 0, \forall s \in N_{2:n\mu}$, entonces $\sum_{r=1}^{n\mu} p_{i,r} q_{r,k_1} = p_{i,1} q_{1,k_1}$ y $\sum_{r=1}^{n\mu} p'_{i,r} q'_{r,k_1} = p'_{i,1} q'_{1,k_1} \forall i \in N_{n\mu}$ y por (1) se sigue

$$(P_{n,n})_{:,1} = (P_{n',n'})_{1:n\mu,1} \quad (4)$$

Asimismo, tenemos que $\sum_{r=1}^{n\mu} p_{2,r} q_{r,j} = p_{2,1} q_{1,j} + q_{2,j}$ y $\sum_{r=1}^{n\mu} p'_{2,r} q'_{r,j} = p'_{2,1} q'_{1,j} + q_{2,j}, \forall j \in N_{mn}$, y debido a (2) y (4), $p_{2,1} q_{1,j} = p'_{2,1} q'_{1,j}$, por lo cual

$$(Q_{n,m})_{2,:} = (Q_{n',m'})_{2,1:mn} \quad (5)$$

Suponiendo que (3) se cumple para los primeros u enteros, con $u \in N_{n\mu-2}$, se probará que se cumple para $u+1$. Por hipótesis de inducción, en particular, (3) se cumple para u , por lo cual $(Q_{n,m})_{u+1,:}$ y $(Q_{n',m'})_{u+1,1:mn}$ son iguales; así los primeros elementos no nulos de ambas están en la misma columna, k_{u+1} ; además, por el AF, $q_{s,k_{u+1}} = q'_{s,k_{u+1}} = 0, \forall s \in N_{u+2:n\mu}$, entonces para cada $i \in N_{n\mu}$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n\mu} p_{i,r} q_{r,k_{u+1}} &= \sum_{r=1}^u p_{i,r} q_{r,k_{u+1}} + p_{i,u+1} q_{u+1,k_{u+1}} \\ \sum_{r=1}^{n\mu} p'_{i,r} q'_{r,k_{u+1}} &= \sum_{r=1}^u p'_{i,r} q'_{r,k_{u+1}} + p'_{i,u+1} q'_{u+1,k_{u+1}} \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción y por (2) se sigue que $\sum_{r=1}^u p_{i,r} q_{r,k_{u+1}} = \sum_{r=1}^u p'_{i,r} q'_{r,k_{u+1}}$ y $q'_{u+1,k_{u+1}} = q'_{u+1,k_{u+1}}$, así, debido a (1)

$$(P_{n,n})_{:,u+1} = (P_{n',n'})_{1:n\mu,u+1} \quad (6)$$

Por otro lado, para todo $j \in N_{m\eta}$

$$\sum_{r=1}^{n\mu} p_{u+2,r} q_{r,j} = \sum_{r=1}^{u+1} p_{u+2,r} q_{r,j} + q_{u+2,j}; \text{ y } \sum_{r=1}^{n\mu} p'_{u+2,r} q'_{r,j} = \sum_{r=1}^{u+1} p'_{u+2,r} q'_{r,j} + q'_{u+2,j}$$

Debido a la hipótesis de inducción y a (6),
 $\sum_{r=1}^{n\mu} p_{u+2,r} q_{r,j} = \sum_{r=1}^{u+1} p_{u+2,r} q_{r,j} + q_{u+2,j}$; y $\sum_{r=1}^{n\mu} p'_{u+2,r} q'_{r,j} = \sum_{r=1}^{u+1} p'_{u+2,r} q'_{r,j} + q'_{u+2,j}$, y
a causa de (1),

$$(Q_{n,m})_{u+2,:} = (Q_{n',m'})_{u+2,1:mn} \quad (7)$$

Lema B.3. Sea la sucesión J_N con elementos en $M_{\mu \times \eta}$, sea $H_{\beta+1,\beta+1}(J_N)$, y sean $n, n_1 \in N_{\mu\beta}$ tales que $n_1 \leq n$. Si F_n y F_{n_1} , son como en la definición B.2, con respecto a la matriz $P_{\beta+1,\beta+1}$. Entonces:

$$F_{n_1} = (F_n)_{1:n_1,1:n_1} \quad (8)$$

Demostración. Por la definición B.2, para cada $i, j \in N_{n_1}$, se sigue que

$$\begin{aligned} ((F_n)_{1:n_1,1:n_1})_{ij} &= (F_n)_{ij} = ((P'_{n,n})^{-1} P^*_{n,n})_{ij} \\ &= \sum_{r=1}^n ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P^*_{n,n})_{r,j} \end{aligned}$$

Ya que $P'_{n,n} \in It_n(R)$, entonces $(P'_{n,n})^{-1} \in It_n(R)$, por consiguiente, $((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} = 0$, si $i < r$, y ya que $i \in N_{n_1}$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P^*_{n,n})_{r,j} &= \sum_{r=1}^{n_1} ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P^*_{n,n})_{r,j} + \sum_{r=n_1+1}^n ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P^*_{n,n})_{r,j} \\ &= \sum_{r=1}^{n_1} ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P^*_{n,n})_{r,j} \end{aligned}$$

Y por el teorema A.6 y la definición B.2

$$\sum_{r=1}^{n_1} ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P^*_{n,n})_{r,j} = \sum_{r=1}^{n_1} ((P'_{n_1,n_1})^{-1})_{i,r} (P^*_{n_1,n_1})_{r,j} = (F_{n_1})_{ij}$$

Lema B.4. Sea J_N con elementos en $M_{\mu \times \eta}$. Si se cumple que el rango de $H_{\beta+1,\alpha}(J_N)$ es n y que $n \leq \beta\mu$. Entonces $\forall i \in N_{(\alpha-1)n}$ y $j \in N_{\beta\mu}$

$$F_n(Q_{\beta+1,\alpha})_{1:n,i} = (Q_{\beta+1,\alpha})_{1:n,i+n} \quad (9)$$

donde $F_{\beta\mu}$ es como en la definición B.2, con respecto a $Q_{\beta+1,\alpha}$ y $P_{\beta+1,\beta+1}$, que son como en la definición B.1.

Demostración. Sea cualquier $i \in N_{(\alpha-1)n}$ y $j \in N_{\beta\mu}$. Por la relación entre $P'_{n\mu,n\mu}$ y $P^*_{n\mu,n\mu}$ en la definición B.2, las propiedades de la MH, el teorema A.6 y los lemas B.1 y B.2:

$$\begin{aligned}
(F_n)_{w,:(Q_{\beta+1,\alpha})_{1:n,i}} &= \sum_{s=1}^n \left(\sum_{r=1}^n (P'_{n,n})_{w,r}^{-1} (P^*_{n,n})_{rs} \right) q_{s,i} \\
&= \sum_{s=1}^n \left(\sum_{r=1}^n (P_{\beta+1,\beta+1})_{w,r}^{-1} p_{r+\mu,s} \right) q_{s,i} \\
&= \sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} \left(\sum_{s=1}^n p_{r+\mu,s} q_{s,i} \right) \\
&= \sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} (H_{n+1,\alpha}(J_N))_{r+\mu,i} \\
&= \sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} (H_{n+1,\alpha}(J_N))_{r,i+n} \\
&= \sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} \left(\sum_{s=1}^n p_{r,s} q_{s,i+n} \right) \\
&= \sum_{s=1}^n \left(\sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} p_{r,s} \right) q_{s,i+n} \\
&= \sum_{s=1}^n \left(\sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} (P_{\beta,\beta})_{r,s} \right) q_{s,i+n} \\
&= (Q_{n+1,\alpha})_{w,i+n}
\end{aligned}$$

lo que demuestra la igualdad (9).

Teorema B.1. Sea J_N con elementos en $\subset M_{\mu \times n}$. Si $\text{rango } H_{\beta,\alpha}(J_N) = \text{rango } H_{\beta+1,\psi}(J_N) = n$

para algún $\psi \in N_{\alpha+1:\infty}$. Entonces,

$$\text{rango } H_{\beta,\psi-1}(J_N) = \text{rango } H_{\beta+1,\psi-1}(J_N) = n$$

Demostración. (i) Supóngase que $H_{\beta+1,\psi-1}$ tiene rango $n_1 < n$. Como $H_{\beta,\alpha}$ tiene rango n , la base de su espacio de columnas se compone por n de sus columnas en las posiciones v_1, \dots, v_n . Luego, tomando las columnas de $H_{\beta+1,\psi-1}$ en las posiciones

v_1, \dots, v_n , se tiene que deben ser linealmente dependientes, es decir $\forall j \in N_{(\beta+1)_\mu}$

$$\sum_{i=1}^n Y_i(H_{\beta+1, \psi-1})_{j, v_i} = 0$$

donde $Y_i \in R$ y existe algún $i \in N_n$ tal que $Y_i \neq 0$; en particular esto garantiza que

$$\sum_{i=1}^n Y_i(H_{\beta, \alpha})_{k, v_i} = 0$$

$\forall k \in N_{\beta\mu}$, donde $Y_i \in R$ y existe algún $i \in N_n$ tal que $Y_i \neq 0$; pero esto contradice que las columnas v_1, \dots, v_n , de $H_{\beta, \alpha}$ sean una base del espacio de columnas.

(ii) Supóngase que $H_{\beta+1, \psi-1}$ tiene rango $n_1 > n$. Entonces tiene n_1 columnas linealmente independientes, sin embargo, cada una de ellas también son columnas de $H_{\beta+1, \psi}$, pero como su rango es $n < n_1$, estas deberían ser linealmente dependientes.

(iii) Supóngase que $H_{\beta, \psi-1}$ tiene rango $n_1 < n$. Entonces cualquier conjunto de más de n_1 columnas son linealmente dependientes, sin embargo, como cada columna de $H_{\beta, \alpha}$ es columna de $H_{\beta, \psi-1}$, entonces la base del espacio de columnas de $H_{\beta, \alpha}$, que contiene $n > n_1$ columnas, sería linealmente dependiente.

(iv) Supóngase que $H_{\beta, \psi-1}$ tiene rango $n_1 > n$. Por los incisos (i) y (ii) se sabe que $H_{\beta+1, \psi-1}$ tiene rango n . Como toda fila de $H_{\beta, \psi-1}$ es fila de $H_{\beta+1, \psi-1}$, entonces cada una de las n_1 filas de la base del espacio de filas de la primera matriz también es fila de la segunda, pero como la segunda tiene rango $n < n_1$, la base tendría que ser linealmente dependiente.

Teorema B.2. Sea la sucesión J_N , con $(J_N) \subset M_{\mu \times n}$. Si $\beta, \alpha \in N$ y la sucesión parcial J_{N_k} satisfacen que

$$\text{rango } H_{\beta, \alpha}(J_{N_k}) = \text{rango } H_{\beta+1, \alpha}(J_{N_k}) = \text{rango } H_{\beta, \alpha+1}(J_{N_k})$$

Entonces, existe $J(k+1) \in M_{\mu \times n}$ tal que al expandir J_{N_k} a $J'_{N_{k+1}}$, agregándole $J(k+1)$, se garantiza que

$$\text{rango } H_{\beta+1, \alpha+1}(J'_{N_{k+1}}) = n$$

Demostración. Sea $n \in N$ el rango de la matriz $H_{\beta, \alpha}(J_{N_k})$. Por hipótesis y la definición A.24, $H_{\beta, \alpha}(J_{N_k})$ y $H_{\beta, \alpha+1}(J_{N_k})$ tienen el mismo rango y los mismos primeros α bloques columna; por tanto, comparten el mismo espacio de columnas y tienen una base, H , en los primeros α bloques columna, formada por n columnas en las posiciones v_1, v_2, \dots, v_n . Incluso, la matriz $H_{\beta+1, \alpha}(J_{N_k})$ tiene como base de su espacio de columnas, aquellas columnas que se hallan en las posiciones v_1, v_2, \dots, v_n .^{XXXIX}

Defínase $J(k+1) \in M_{\mu \times n}$ como la matriz cuya columna $j \in N_n$ es combinación lineal de las columnas en las posiciones v_1, \dots, v_n del bloque de fila $\beta+1$ de $H_{\beta+1, \alpha}(J_{N_k})$: $H_{\beta+1, \alpha}(J_{N_k})(\beta+1, :) = (J(\beta+1) \dots J(\beta+\alpha))$, empleando el vector coordenado $[(H_{\beta, \alpha+1}(J_{N_k}))_{:, j+\alpha n}] \mathcal{H}$, y sea $J'_{N_{k+1}}$ la sucesión expandida de J_{N_k} al agregar $J(k+1)$. Entonces, el rango de $H_{\beta+1, \alpha+1}(J'_{N_{k+1}})$ es n , en efecto, para comprobarlo solo hay que probar que las columnas en su bloque columna $\alpha+1$, $H_{\beta+1, \alpha+1}(J'_{N_{k+1}})(:, \alpha+1)$, pertenecen al espacio de columnas de $H_{\beta+1, \alpha}(J_{N_k})$.

Sea la matriz $V_\epsilon = (\epsilon_{v_1}, \dots, \epsilon_{v_n})$, donde $\epsilon_{v_i} \in R^{an}$ es el vector con 1 en la coordenada v_i y 0 en las restantes. Dado que $H_{\beta, \alpha+1}(J'_{N_{k+1}}) = H_{\beta, \alpha+1}(J_{N_k})$ y por la definición de $J(k+1)$, se sigue que

$$\begin{aligned} (H_{\beta, \alpha+1}(J'_{N_{k+1}}))_{:, j+\alpha n} &= H_{\beta, \alpha}(J_{N_k}) \cdot V_\epsilon \cdot [(H_{\beta, \alpha+1}(J_{N_k}))_{:, j+\alpha n}] \mathcal{H} \\ J(k+1)_{:, j} &= H_{\beta+1, \alpha}(J_{N_k})(\beta+1, :) \cdot V_\epsilon \cdot [(H_{\beta, \alpha+1}(J_{N_k}))_{:, j+\alpha n}] \mathcal{H} \end{aligned}$$

^{XXXIX} Suponiendo que fuesen linealmente independientes, se tiene que $\exists \lambda_i \neq 0, i \in N_n$, tal que $\sum_{i=1}^n \lambda_i (H_{\beta+1, \alpha}(J_{N_k}))_{:, v_i} = \vec{0}$, que implica $\sum_{i=1}^n \lambda_i (H_{\beta+1, \alpha}(J_{N_k}))_{1: \beta \mu, v_i} = \vec{0}$, es decir, $\exists \lambda_i \neq 0, i \in N_n$ tal que $\sum_{i=1}^n \lambda_i (H_{\beta, \alpha}(J_{N_k}))_{:, v_i} = \vec{0}$, lo que contradice que \mathcal{H} sea una base.

Por lo cual, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 (H_{\beta+1,\alpha+1}(J'_{N_{k+1}}))_{:,j+\alpha n} &= \begin{pmatrix} (H_{\beta,\alpha+1}(J'_{N_{k+1}}))_{:,j+\alpha n} \\ J(k+1)_{:,j} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} H_{\beta,\alpha}(J_{N_k}) \cdot V_{\epsilon} \cdot [(H_{\beta,\alpha+1}(J_{N_k}))_{:,j+\alpha n}] \mathcal{H} \\ H_{\beta+1,\alpha}(J_{N_k})(\beta+1, :) \cdot V_{\epsilon} \cdot [(H_{\beta,\alpha+1}(J_{N_k}))_{:,j+\alpha n}] \mathcal{H} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} H_{\beta,\alpha}(J_{N_k}) \\ H_{\beta+1,\alpha}(J_{N_k})(\beta+1, :) \end{pmatrix} V_{\epsilon} \cdot [(H_{\beta,\alpha+1}(J_{N_k}))_{:,j+\alpha n}] \mathcal{H} \\
 &= H_{\beta+1,\alpha}(J_{N_k}) \cdot V_{\epsilon} \cdot [(H_{\beta,\alpha+1}(J_{N_k}))_{:,j+\alpha n}] \mathcal{H}
 \end{aligned}$$

Así las columnas de $H_{\beta+1,\alpha+1}(J'_{N_{k+1}})(:, \alpha+1)$, pertenecen al espacio de columnas de $H_{\beta+1,\alpha}(J_{N_k})$. Por lo tanto, se concluye que $\text{rango } H_{\beta+1,\alpha+1}(J'_{N_{k+1}}) = n$

Teorema B.3. Sea la sucesión J_N , con $(J_N) \subset M_{\mu \times n}$ y sean $\beta, \alpha \in N$ y $\psi \in N_{\alpha:\infty}$ dados. Si la sucesión parcial J_{N_k} , $k = \psi + \beta$, satisface que:

$$\text{rango } H_{\beta,\alpha}(J_{N_k}) = \text{rango } H_{\beta,\alpha+1}(J_{N_k}) = \text{rango } H_{\beta+1,\psi}(J_{N_k}) = n$$

Entonces, existen $J(k+1), \dots, J(k+\beta) \in M_{\mu \times n}$ tales que al expandir J_{N_k} a $J^*_{N_{k+\beta}}$, agregando ordenadamente estos β elementos, se garantiza que:

$$\text{rango } H_{\beta+1,\psi+\beta}(J^*_{N_{k+\beta}}) = n$$

Demostración. (i) Si se toma $\psi = \alpha$. Como $H_{\beta,\alpha}(J_{N_k})$ y $H_{\beta+1,\alpha}(J_{N_k})$ tienen rango n , y por hipótesis también $H_{\beta,\alpha+1}(J_{N_k})$, por el teorema B.2 existe un $J(k+1) \in M_{\mu \times n}$ tal que $H_{\beta+1,\alpha+1}(J'_{N_{k+1}})$ tiene rango n , donde J'_{N_k} es la expansión de J_{N_k} al agregarle $J(k+1)$.

Sean v_1, \dots, v_n las posiciones de las filas de $H_{\beta+1,\alpha}(J'_{N_{k+1}})$ que conforman la base de su espacio de filas, \mathcal{H} . Como $H_{\beta+1,\alpha}(J'_{N_{k+1}})$ y $H_{\beta+1,\alpha+1}(J'_{N_{k+1}})$ tienen rango n , entonces cada fila de $H_{\beta+1,\alpha+1}(J'_{N_{k+1}})(:, \alpha+1)$ pertenece a \mathcal{H} , en particular, cada fila

de $H_{\beta+1,\alpha+1}(J'_{N_{k+1}})(2:\beta+1,\alpha+1)$ es combinación lineal de las filas en las posiciones v_1, \dots, v_n de $H_{\beta+1,\alpha}(J'_{N_{k+1}})(2:\beta+1,:)$.

Luego, como $H_{\beta+1,\alpha+1}(J'_{N_{k+1}})(2:\beta+1,\alpha+1) = H_{\beta,\alpha+2}(J'_{N_{k+1}})(:,\alpha+2)$ y $H_{\beta+1,\alpha}(J'_{N_{k+1}})(2:\beta+1,:) = H_{\beta,\alpha+1}(J'_{N_{k+1}})(:,2:\alpha+1,:)$, entonces cada fila de $H_{\beta,\alpha+2}(J'_{N_{k+1}})(:,\alpha+2)$ es combinación lineal de las filas en las posiciones $v_1+\mu, \dots, v_n+\mu$ de $H_{\beta,\alpha+1}(J'_{N_{k+1}})$, por tanto $H_{\beta,\alpha+2}(J'_{N_{k+1}})$ tiene rango n .

Así se tiene que $H_{\beta,\alpha+2}(J'_{N_{k+1}})$, $H_{\beta+1,\alpha+1}(J'_{N_{k+1}})$ y $H_{\beta,\alpha+1}(J'_{N_{k+1}})$ poseen rango n ; por el teorema B.2 existe un $J(k+2) \in M_{\mu \times n}$ que expande $J'_{N_{k+1}}$ a $J''_{N_{k+2}}$ al agregarle $J(k+2)$, tal que $H_{\beta+1,\alpha+2}(J''_{N_{k+2}})$ tiene rango n . Repitiendo el proceso anterior un número β de veces, se expande J_{N_k} a $J^{(\beta)}_{N_{k+\beta}} = J^*_{N_{k+\beta}}$ y se obtiene que $H_{\beta+1,\alpha+\beta}(J^*_{N_{k+\beta}})$ tienen rango n .

ii) Tomando $\psi \in N_{\alpha+1:\infty}$ por el teorema B.1 y repitiendo un número β de veces el proceso del caso anterior, se puede expandir J_{N_k} a $J^\beta_{N_{k+1}} = J^*_{N_{k+\beta}}$ y se obtiene que $H_{\beta+1,\psi+\beta}(J^*_{N_{k+\beta}})$ tiene rango n .

Teorema B.4. (realización parcial mínima). Sea la sucesión J_N con elementos en $M_{\mu \times n}$ y sean $\beta, a \in N$ y $\psi \in N_{a:\infty}$ dados. Si α, β son los menores valores tales que

$$\text{rango } H_{\beta,\alpha}(J_N) = \text{rango } H_{\beta,\alpha+1}(J_N) = \text{rango } H_{\beta+1,\psi}(J_N) = n \quad (10)$$

Entonces, la sucesión parcial J_{N_k} , de los $k = \beta + \psi$ primeros elementos de J_N , es mínimamente realizada por $(F_n, G_n$ y $H_n)$ donde F_n, G_n y H_n son como en la definición B.2.

Demostración. Por el teorema B.3 existen $J(k+1), \dots, J(k+\beta) \in M_{\mu \times n}$, tales que expanden J_{N_k} a $J_{N_{k+\beta}}$, donde esta extensión permite que $H_{\beta+1,\psi+\beta}(J_{N_{k+\beta}}) = n$. Al factorizar $H_{\beta+1,\psi+\beta}(J_{N_{k+\beta}})$ y $H_{\beta+1,\psi}(J_{N_k})$, por el lema B.2 se comprueba que ambas tienen la misma matriz $P_{\beta+1,\beta+1}$, y sus matrices $Q_{\beta+1,\psi+\beta}$ y $Q_{\beta+1,\psi}$, respectivamente, satisfacen que (i) por el lema B.1 las filas mayores a n son nulas, y (ii), $(Q_{\beta+1,\psi+\beta})_{:1}\psi n = Q_{\beta+1,\psi}$. Por consiguiente, si respecto de F_n, G_n y H_n están definidas bajo B.2,

con respecto a $P_{\beta+1,\beta+1}$ y $Q_{\beta+1,\psi}$, y F'_n , G'_n y H'_n con respecto a $P_{\beta+1,\beta+1}$ y $Q_{\beta+1,\psi+\beta}$ entonces $F_n = F'_n$, $G_n = G'_n$ y $H_n = H'_n$.

Por tanto, si $t \in N_{\psi+\beta}$, y empleando los lemas B.1, B.2, B.3, y B.4, se sigue que

$$\begin{aligned}
 H_n(F_n)^{t-1}G_n &= H'_n(F'_n)^{t-1}G'_n \\
 &= (P_{\beta+1,\beta+1})_{1;\mu;1:n}(F_n)^{t-1}(Q_{\beta+1,\psi+\beta})_{1:n,1:n} \\
 &= (P_{\beta+1,\beta+1})_{1;\mu;1:n}(Q_{\beta+1,\psi+\beta})_{1:n,(t-1)n+1:tn} \\
 &= (P_{\beta+1,\beta+1})_{1;\mu;:(Q_{\beta+1,\psi+\beta})_{:(t-1)n+1:tn}} \\
 &= J_{1+t} = J(1+t-1) = J(t)
 \end{aligned}$$

Esto demuestra que la realización $(F_n \ G_n \ H_n)$ de J_{N_k} es mínima. Suponiendo que no lo es, entonces existe una realización de dimensión $v < n$. Como α, β son los menores enteros para los cuales se garantiza (10), entonces $\alpha, \beta \in N$ son los índices de controlabilidad y observabilidad, respectivamente.^{XL} Por consiguiente, $O_\beta * C_\alpha$ tiene rango v , y ya que $O_\beta * C_\alpha = H_{\beta,\alpha}(J_{N_k})$, entonces $H_{\beta,\alpha}(J_{N_k})$ tiene rango v . Pero, por hipótesis, $H_{\beta,\alpha}(J_{N_k})$ tiene rango n , así $v < n = v$. Por tanto, $(F_n \ G_n \ H_n)$ es una realización parcial mínima.

^{XL} Véase la definición A.22 (matriz de controlabilidad) y definición A.23 (matriz de observabilidad).

APÉNDICE C

ALGORITMOS Y CÓDIGOS DE LOS PROGRAMAS

CÓDIGO C.1. MÓDULO REALPAR

```
1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 @author: armando
5
6 Módulo con funciones desarrolladas para los códigos empleados en la tesis
7 "La Teoría de la Realización como Método de Proyección de los Coeficientes
8 Técnicos de la Matriz Insumo-Producto: desarrollo teórico y un ejemplo de
9 implementación para el caso de México, 1993-2017."
10 """
11 import numpy as np
12 import itertools as it
13 # =====
14 def lista_matriz_c1(n):
15     sm=[]
16     for i in range(1,n+1):
17         al=((i)*(i+1))/2
18         n_el=np.round(np.matrix([[a1]]))
19         sm.append(n_el)
20     return(sm)
21 # =====
22 def lista_matriz(n):
23     sm=[np.matrix([[1,1],[1,1]]),np.matrix([[3,1],[1,3]])]
24     for i in range(n-2):
25         n_el=np.matrix([[sm[i+1][0,0]+(i+3),sm[i][0,1]+sm[i+1][0,1]],
26                         [sm[i][0,1]+sm[i+1][0,1],sm[i+1][0,0]+(i+3)]])
27         sm.append(n_el)
28     return(sm)
29 # =====
30 def valores_rank_MH(L):
31     i=1
32     j=i
33     val_MH=[]
34     while i+j<=len(L):
35         H_1=matriz_hankel(L,i,j)
36         H_2=matriz_hankel(L,i+1,j)
37         if np.linalg.matrix_rank(H_1)==np.linalg.matrix_rank(H_2):
38             H_3=matriz_hankel(L,i,j+1)
39             if np.linalg.matrix_rank(H_1)==np.linalg.matrix_rank(H_3):
40                 H_psi=matriz_hankel(L,i+1,len(L)-i)
41                 if np.linalg.matrix_rank(H_1)==np.linalg.matrix_rank(H_psi):
42                     val_MH.append(["Los valores de la MH son b=%i, a=%i, psi=%i y n=%i."
43                                     % (H_1.shape[0]/L[0].shape[0],H_1.shape[1]/L[0].shape[1], len(L)-H_1.shape[1]/L[0].
```

```

        shape[1], np.linalg.matrix_rank(H_1)))
43         break
44     else:
45         i=i+1
46     else:
47         j=j+1
48     else:
49         i=i+1
50     return(np.round(H_psi), val_MH[0])
51 # =====
52 def matriz_hankel(L,r,s):
53     f=L[0].shape[0]
54     c=L[0].shape[1]
55     H=np.matrix(np.zeros([f*r,c*s]))
56     for i, j in it.product(range(r),range(s)):
57         H[f*i:f*(i+1),c*j:c*(j+1)]=L[i+j]
58     return(H)
59 # =====
60 def MH(L_M):
61     f_sm=L_M[0].shape[0]
62     c_sm=L_M[1].shape[1]
63     n=len(L_M)
64     l_rank=[]
65     for i, j in it.product(range(n+1),range(n+1)):
66         if i+j==n:
67             l_rank.append((i,j))
68     if (i+j==n and np.linalg.matrix_rank(matriz_hankel(i,j,f_sm,c_sm,n))==
69         np.linalg.matrix_rank(matriz_hankel(i,j,f_sm,c_sm,n))):
70         print(2)
71     return(2)
72 # =====
73 def matrizPQ(H):
74     n=H.shape[0]
75     m=H.shape[1]
76     P=np.matrix(np.identity(n))
77     Q=np.matrix(np.zeros([n,m]))
78     fila=0
79     indice=[]
80     for r in range(m):
81         Q[fila,r]=H[fila,r]
82     while fila<n-1:
83         for j in range(m):
84             if Q[fila,j]!=0:
85                 indice.append(j)
86                 break
87     if len(indice)==fila+1:
88         for i in range(1,n-fila):
89             acumulador1=0
90             for k in range(fila+i-1):
91                 acumulador1=acumulador1+P[fila+i,k]*Q[k,indice[fila]]
92             P[fila+i,fila]=(H[fila+i,indice[fila]]-acumulador1)/Q[fila,indice[fila]]
93     for j in range(m):
94         acumulador2=0
95         if all(j!=k for k in indice):
96             for r in range(fila+1):
97                 acumulador2=acumulador2+P[fila+1,r]*Q[r,j]
98             Q[fila+1,j]=H[fila+1,j]-acumulador2
99         fila=fila+1
100     return(P,Q,np.linalg.matrix_rank(Q),P*Q)
101 # =====
102 def real_par(H_psi):
103     A=matrizPQ(np.round(H_psi))
104
105     G_n=A[1][0:np.linalg.matrix_rank(H_psi),0:2]
106     H_n=A[0][0:2,0:np.linalg.matrix_rank(H_psi)]
107     P_nmin=A[0][0:np.linalg.matrix_rank(H_psi),0:np.linalg.matrix_rank(H_psi)]
108
109     P_nmin_inv=(P_nmin).I

```

```

110 P_ast=np.matrix(A[0][2:np.linalg.matrix_rank(H_psi)+2,0:np.linalg.matrix_rank(I
111 F_n=P_nmin_inv*P_ast
112
113 return (F_n,G_n,H_n)
114 # =====

```

CÓDIGO C. 2. DIMENSIÓN DEL ESPACIO DE COLUMNAS PARES DE LA MH DEL CAPÍTULO 1

```

1 #!/ usr / bin / env python3
2 # -*- coding: utf -8 -*-
3 """
4 @author: armando
5
6 Verifica que la dimensión del espacio de las columnas pares de la matriz de
7 hankel de orden (6,1000000) del capitulo 1 es igual a 3. Para ello se prueba
8 que la última de 4 columnas pares consecutivas es combinación lineal de las
9 tres anteriores.
10 """
11 import numpy as np
12 import realpar as rp
13 # =====
14 # GENERACIÓN DE LA MATRIZ Z CON LAS COLUMNAS PARES DE LA MH DEL CAPITULO1
15 # =====
16 t=1000000
17 L=lista_matriz_c1(5+t)
18 Z=matriz_hankel(L,6,t)
19 # =====
20 # VERIFICACIÓN DE QUE LA ÚLTIMA DE CUATRO COLUMNAS CONSECUTIVAS DE Z ES UNA COMBINACIÓN
21 # LINEAL DE LAS TRES PRIMERAS MEDIANTE LOS ESCALARES 1,-3 Y 3
22 # =====
23 a=[1,-3,3]
24 for i in range(Z.shape[1]-3):
25     A=a[0]*Z[0:,i]+a[1]*Z[0:,i+1]+a[2]*Z[0:,i+2]
26     B=Z[0:,i+3]
27     if sum(A-B)!=0:
28         print("El rango es distinto de 3")
29         break
30 print("El rango es igual a 3")
31 # =====

```

CÓDIGO C. 3. REALIZACIÓN MÍNIMA DE LA UCESIÓN FINITA DEL CAPÍTULO 2 SECCIÓN 1

```

1 #!/ usr / bin / env python3
2 # -*- coding: utf -8 -*-
3 """
4 @author: armando
5
6 El programa genera la Realización Parcial Mínima del capitulo 2 sección 1.
7 """
8 import realpar as rp
9 import numpy as np
10 # =====
11 # COMPROBACIÓN DE LA HIPÓTESIS DEL RANGO DEL TEOREMA DE REALIZACIÓN PARCIAL
12 # =====
13 L=rp.lista_matriz(11)
14 H_psi,v_r=valores_rank_MH(L)
15 print("\n", v_r[0])
16 # =====
17 # DESCOMPOSICIÓN P, Q DE LA MATRIZ H_psi
18 # =====
19 A=matrizPQ(np.round(H_psi))
20 P,Q,r_Q,PQ=matrizPQ(np.round(H_psi))
21 # =====
22 # GENERACIÓN DE LA REALIZACIÓN (F, G, H)
23 # =====
24 G_n=Q[0:np.linalg.matrix_rank(H_psi),0:2]
25 H_n=P[0:2,0:np.linalg.matrix_rank(H_psi)]
26 P_nmin=P[0:np.linalg.matrix_rank(H_psi),0:np.linalg.matrix_rank(H_psi)]

```

```

27 P_nmin_inv=(P_nmin).I
28 P_ast=np.matrix(P[2:np.linalg.matrix_rank(H_psi)+2,0:np.linalg.matrix_rank(H_psi)])
29 F_n=P_nmin_inv*P_ast
30 # =====
31 # DETERMINACIÓN DE LA SUCESIÓN APROXIMADA MEDIANTE LA REALIZACIÓN Y VISUALIZACIÓN DE LAS
32 # MATRICES DEL PROCESO DE REALIZACIÓN
33 # =====
34 lista=[]
35 lista.append(["MH","rangø",np.linalg.matrix_rank(PQ)],PQ))
36 lista.append(["P","rangø",np.linalg.matrix_rank(P)],np.round(P,decimals=0))
37 lista.append(["Q","rangø",np.linalg.matrix_rank(Q)],np.round(Q,decimals=0))
38 lista.append(["P'"],np.round(P_nmin,decimals=2))
39 lista.append(["P*"],np.round(P_ast,decimals=2))
40 lista.append(["F"],np.round(F_n,decimals=2))
41 lista.append(["G"],np.round(G_n,decimals=4))
42 lista.append(["H"],np.round(H_n,decimals=0))
43 lista.append([])
44 for i in range(len(L)):
45     L_i=H_n*(F_n**i)*G_n
46     lista[8].append(["L%i" % (i+1),L_i])
47
48 a=int(input("¿Qué matriz(ces) quieres ver?\n MH=1; P=2; Q=3; P'=4; P*=5; F=6; G=7; H=8;
DE_est=9\n(n)")-1
49 if a<8:
50     print("\n La matriz es:\n\n",lista[a][0]+"\n",lista[a][1])
51 else:
52     print("\n La descripción externa estimadapor la realización es:\n")
53     for i in range(len(L)):
54         print(lista[8][i][0],"\n",lista[8][i][1])
55 # =====

```

CÓDIGO C. 4. REALIZACIÓN MÍNIMA DE LA SUCESIÓN FINITA Y ALEATORIA DEL CAPÍTULO 2 SECCIÓN 2

```

1 #!/ usr / bin / env python3
2 # -*- coding: utf -8 -*-
3 """
4 @author: armando
5 """
6 import numpy as np
7 import scipy.linalg as spl
8 import realpar as rp
9 import matplotlib.pyplot as plt
10 # =====
11 # DETERMINAMOS LA MATRIZ DE HANKELDE LA SUCESIÓN DE MATRICES
12 # r[0] número de filas que tienen las matrices de la sucesión
13 # r[1] número de columnas que tienen las matrices de la sucesión
14 # r[2] número de matrices en la sucesión
15 # =====
16 r=[2,2,10]
17 L_prub=rp.lista_matriz(20)
18 L=rp.lista_matriz(r[2])
19 L_al=L*2
20 rangos=[]
21 ran_ant=[]
22 mhs=[]
23 for i in range(1,r[2]+1):
24     H=rp.matriz_hankel(L,i,r[2]+1-i)
25     inf=[i,r[2]+1-i,np.linalg.matrix_rank(H)]
26     rangos.append(inf)
27     mhs.append(H)
28     if i<r[2]:
29         H_ant=rp.matriz_hankel(L,i,r[2]-i)
30         inf_ant=[i,r[2]-i,np.linalg.matrix_rank(H_ant)]
31         ran_ant.append(inf_ant)
32 # =====
33 # DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL DE LA MATRIZ DE HANKEL mhs[4]
34 # =====
35 usv=np.linalg.svd(mhs[4])

```

```

36 s=spl.diagsvd(usv[1],usv[0].shape[1],usv[2].shape[0])
37 U=np.matrix(usv[0])
38 V=np.matrix(usv[2])
39 S=np.matrix(s)
40 # =====
41 # GENERACIÓN DE LAS MH REDUCIDAS, DETERMINACIÓN DE LA REALIZACIÓN Y GENERACIÓN
42 # DE LAS MATRICES ESTIMADAS
43 # =====
44 mt_est=[]
45 MH_red=[]
46 rp_red=[]
47 for i in range(1,int(len(usv[1])/L[1].shape[1])):
48     t=L[1].shape[1]
49     V_i=V[0:t*i,0:]
50     S_i=S[0:t*i,0:t*i]
51     U_i=U[0:,0:t*i]
52     H_red=U_i*S_i*V_i
53     MH_red.append(np.around(H_red,3))
54     F_r,G_r,H_r=rp.real_par(H_red)
55     real_red=[np.around(F_r,2),np.around(G_r,2),np.around(H_r,2)]
56     rp_red.append(real_red)
57     for j in range(len(L_prub)):
58         l_est_i=H_r*(F_r**j)*G_r
59         mt_est.append(l_est_i)
60 # =====
61 # DETERMINACIÓN DE LA PROXIMIDAD DE LAS DESCRIPCIONES EXTERNAS ESTIMADAS A LA REAL Y
62 # GENERACIÓN DE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA
63 # =====
64 pro_apr=[]
65 for j in range(4):
66     prom_F=0
67     for i in range(len(L_prub)-10):
68         prom_F=prom_F+np.linalg.norm(mt_est[i+20*j]-L_prub[i])
69     pro_apr.append(round(prom_F*1/10,2))
70 plt.figure(figsize=(12, 5), dpi=100)
71 a=int(input("¿Qué Matriz Reducida quieres usar para aproximar la descripción externa? (
72     elige 1,2,3,4)\n"))-1
73 for j in range(2):
74     plt.subplot(1,2,j+1)
75     for i in range(len(L_prub)-10):
76         if i<1:
77             plt.plot(L_prub[i][:,j],"o:",color="c",linewidth=2,label='real')
78             plt.plot(mt_est[i+20*a][:,j],"x-",color="b",linewidth=2,label='estimado')
79             plt.legend(loc="upper center")
80             plt.xticks([0,1],["(1, %i)"%(j+1),"(2, %i)"%(j+1) ])
81             if a==0:
82                 plt.ylim(-10,70)
83             if a==1:
84                 plt.ylim(0,1100)
85             if a==2 or a==3:
86                 plt.ylim(0,66)
87         else:
88             plt.plot(L_prub[i][:,j],"o:",color="c",linewidth=2)
89             plt.plot(mt_est[i+20*a][:,j],"x-",color="b",linewidth=2)
90             plt.xlabel("Coordenada")
91             plt.ylabel("Valor")
92 plt.savefig("nf_%i.png"%(2*(a+1)), dpi=200)
93 print("El promediodede las distanciasde la RE real y la Estimadaes",pro_apr[a])
94 # =====

```

CÓDIGO C. 5. REALIZACIÓN DE LA MATRIZ INVERSA DE LEONTIEF DEL CAPÍTULO 3

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 #-*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 @author: armando
5 """
6 import numpy as np

```

```

7 import scipy.linalg as spl
8 import realpar as rp
9 import matplotlib.pyplot as plt
10 import matplotlib.pyplot as pl
11 import pandas as pd
12 import itertools as it
13
14 io_b=pd.read_excel('Bases de datos/Tesis Input-Output.xlsx',sheet_name='Var Op')
15 Cve=io_b[io_b.columns[1]]+io_b[io_b.columns[2]]+io_b[io_b.columns[4]]
16 Mc=(io_b[io_b.columns[5]]+io_b[io_b.columns[6]])*io_b[io_b.columns[9]]
17 X=io_b[io_b.columns[8]]*io_b[io_b.columns[9]]
18 Yf=Cve+X+io_b[io_b.columns[3]]
19 M=Mc+io_b[io_b.columns[7]]*io_b[io_b.columns[9]]
20 ipo=pd.DataFrame({'a11':Cve/Yf,'a12':X/M,'a21':Mc/Yf,'a22':0})
21 ip=ipo.drop(range(100,104,1),axis=0)
22 # =====
23 # GENERACIÓN DE LA DESCRIPCIÓN EXTERNA (DE) TRIMESTRAL Y SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA
24 # =====
25 ct=[]
26 s_io=[]
27 A=np.zeros((2,2))
28 I=np.identity(2)
29 for i in range(len(ip)):
30     for j, k in it.product(range(2),range(2)):
31         A[j,k]=ip[ip.columns[j*2+k]][i]
32     ct.append(np.matrix(A))
33     s_io.append(np.linalg.inv(np.matrix(I)-np.matrix(A)))
34
35 pl.figure(figsize=(14, 4), dpi=100)
36 for j, k in zip(it.product(range(s_io[0].shape[0]),range(s_io[0].shape[1])),['c','b',
37     coral','gold']):
38     for i in range(len(s_io)):
39         plt.plot(i+1,s_io[i][j[0],j[1]],"o",color="%s"%k,label='Coordenada (%i,%i)'
40             %(j[0],j[1]))
41     else:
42         plt.plot(i+1,s_io[i][j[0],j[1]],"o",color="%s"%k)
43 pl.xticks(np.arange(1,102,3))
44 pl.yticks(np.arange(0,8,.5))
45 plt.xlim(0,101)
46 plt.ylim(0,8.5)
47 plt.xlabel("MATRIZ DE LA DESCRIPCIÓN EXTERNA REAL")
48 plt.grid()
49 plt.ylabel(" VALOR DE LA COORDENADA ")
50 plt.legend(loc="upper center")
51 plt.savefig("cp_do.png",bbox_inches='tight',dpi=200)
52 # =====
53 # COMPROBACIÓN DE LAS HIPÓTESIS DE RANGO DEL TEOREMA DE REALIZACIÓN Y
54 # DETERMINACIÓN LA MH PARA REDUCCIÓN DE DIMENSIÓN
55 # =====
56 rangos=[]
57 ran_ant=[]
58 mhs=[]
59 for i in range(1,len(s_io)+1):
60     H=rp.matriz_hankel(s_io,i,len(s_io)+1-i)
61     inf=[i,len(s_io)+1-i,np.linalg.matrix_rank(H)]
62     rangos.append(inf)
63     mhs.append(H)
64     if i<len(s_io):
65         H_ant=rp.matriz_hankel(s_io,i,len(s_io)-i)
66         inf_ant=[i,len(s_io)-i,np.linalg.matrix_rank(H_ant)]
67         ran_ant.append(inf_ant)
68 # =====
69 # DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL DE LA MATRIZ DE HANKEL Y GRAFICACIÓN DE SUS VALORES SINGULARES
70 # =====
71 usv=np.linalg.svd(mhs[50])
72 s=spl.diagsvd(usv[1],usv[0].shape[1],usv[2].shape[0])
73 U=usv[0]

```



```

73 V=usv[2]
74 S=np.matrix(s)
75 MH_dvs=usv
76 vs_n=MH_dvs[1]/MH_dvs[1].max(0)
77 pl.figure(figsize=(14, 4), dpi=100)
78 plt.plot(np.arange(100)+1,vs_n,"o", color="c")
79 plt.plot(3,vs_n[2],"o", color="r")
80 plt.xlabel("POSICIÓN DEL VALOR SINGULAR")
81 plt.ylabel("VALOR SINGULAR NORMALIZADO")
82 pl.xlim(0,101)
83 plt.grid()
84 pl.xticks(np.arange(0,103,4))
85 pl.yticks(np.arange(0,1.04,.05))
86 plt.savefig("vs_mh_1.png",bbox_inches='tight', dpi=200)
87 # =====
88 # GRAFICACIÓN DE SUS VALORES SINGULARES EXTRAYENDO qui_vs DE ELLOS
89 # =====
90 qui_vs=4
91 pl.figure(figsize=(14, 4), dpi=100)
92 plt.plot(np.arange(len(s_io)-qui_vs+1,vs_n[qui_vs:100],"o",color="c")
93 plt.plot(61,vs_n[60],"o", color="r")
94 plt.xlabel("POSICIÓN DEL VALOR SINGULAR")
95 plt.ylabel("VALOR SINGULAR NORMALIZADO")
96 pl.xlim(0,101)
97 plt.grid()
98 pl.xticks(np.arange(0,104,4))
99 pl.yticks(np.arange(0,.02,.001))
100 plt.savefig("sin%ivs.png" %qui_vs,bbox_inches='tight', dpi=900)
101 # =====
102 # GENERACIÓN DE LAS MH REDUCIDAS, DETERMINACIÓN DE LA REALIZACIÓN Y GENERACIÓN DE LAS
103 # MATRICES ESTIMADAS
104 # =====
105 mt_est=[]
106 MH_red=[]
107 rp_red=[]
108 for i in range(1,int(len(usv[1])/s_io[1].shape[1])):
109     t=s_io[1].shape[1]
110     V_i=V[0:t*i,0:]
111     S_i=S[0:t*i,0:t*i]
112     U_i=U[0:,0:t*i]
113     H_red=U_i*S_i*V_i
114     MH_red.append(H_red)
115     F_r,G_r,H_r=rp.real_par(H_red)
116     real_red=[F_r,G_r,H_r]
117     rp_red.append(real_red)
118     for j in range(len(s_io)):
119         l_est_i=H_r*(F_r**j)*G_r
120         mt_est.append(l_est_i)
121 # =====
122 # DETERMINACIÓN DE LA PROXIMIDAD DE LAS DESCRIPCIONES EXTERNAS ESTIMADAS A LA REAL
123 # =====
124 distancias=[]
125 for j in range(len(MH_red)):
126     prom_F=0
127     for i in range(len(s_io)):
128         prom_F=prom_F+np.linalg.norm(mt_est[i+100*j]-s_io[i])
129     distancias.append([round(prom_F*(1/100),2),j+1])
130 tab_dis=np.zeros([10,10])
131 for j,i in it.product(range(5),range(10)):
132     if i+j*10<len(distancias):
133         tab_dis[i,2*j:2*(j+1)]= distancias[i+j*10]
134 dis_frob=pd.DataFrame(tab_dis)
135 print(dis_frob.to_latex(header=False,index=False))
136 # =====
137 # REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PROXIMIDAD DE LAS DESCRIPCIONES EXTERNAS ESTIMADAS Y REAL
138 # =====
139 plt.figure(figsize=(12,5),dpi=100)
140 a=int(input("¿Qué Matriz Reducidaquieres usar para aproximarla descripción externa?(

```

```

        elige entre 1-49)\n"))-1
141 for j in range(2):
142     plt.subplot(1,2,j+1)
143     for i in range(len(s_io)):
144         if i<1:
145             plt.plot(s_io[i][:,j],"o:",color="c",linewidth=2,label='real')
146             plt.plot(mt_est[i+100*a][:,j],"x-",color="b",linewidth=2,label='estimado')
147             plt.legend(loc="upper center")
148             plt.xticks([0,1],["(1,%i)"%(j+1),"(2,%i)"%(j+1)])
149         else:
150             plt.plot(s_io[i][:,j],"o:",color="c",linewidth=2)
151             plt.plot(mt_est[i+100*a][:,j],"x-",color="b",linewidth=2)
152             plt.xlabel("Coordenada")
153             plt.ylabel("Valor")
154 print(np.around(mt_est[100*a:100*(a+1)],2))
155 plt.savefig("best_aprox_%i.png"%(a+1),bbox_inches='tight',dpi=200)
156 # =====
157 # GRÁFICA DE LAS DISTANCIAS PROMEDIO ENTRE LA DESCRIPCIÓN EXTERNA REAL Y
158 # LAS ESTIMADAS
159 # =====
160 pr_ord=sorted(distancias)
161 aprox=np.array(pr_ord)
162 val_ap=np.array(pr_ord)
163 c=39
164 ind=val_ap[c:len(aprox),0]>325
165 val_ap[c:len(aprox),0][ind]=350
166 width =.95
167 col_r=7
168 pl.figure(figsize=(25, 8), dpi=100)
169 plt.subplot(211)
170 bars = pl.bar(np.array(aprox[0:c,1]), np.array(aprox[0:c,0]),width=width)
171 for r,bar in zip(np.array(aprox[0:c,0]), bars):
172     bar.set_facecolor(pl.cm.jet(r/col_r))
173     bar.set_alpha(.9)
174 pl.xticks(np.arange(1,51))
175 pl.yticks(np.arange(0,max(np.array(aprox[0:c,0]))+1,.5))
176 plt.ylabel("DISTANCIA PROMEDIO")
177 pl.xlim(0.3,49.5)
178 pl.ylim(0,max(np.array(aprox[0:c,0]))+1)
179 for label, x, y in zip(np.trunc(aprox[0:c,0]*10)/10,aprox[0:c,1]-0.2,aprox[0:c,0]+.2):
180     plt.annotate(label, xy=(x,y))
181 plt.subplot(212)
182 bars = pl.bar(np.array(val_ap[c:49,1]), np.array(val_ap[c:49,0]),width=width)
183 for r,bar in zip(np.array(val_ap[c:49,0]), bars):
184     bar.set_facecolor(pl.cm.jet(r/col_r))
185     bar.set_alpha(.9)
186 pl.xticks(np.arange(1,51))
187 pl.yticks(np.arange(0,325,25))
188 plt.xlabel(" PARES DE VALORES SINGULARES MÁS GRANDES")
189 plt.ylabel("DISTANCIA PROMEDIO")
190 pl.xlim(0.3,49.5)
191 pl.ylim(400,0)
192 for label,x,y in zip(aprox[c:len(aprox),0],val_ap[c:len(aprox),1]-0.5,val_ap[c:len(
aprox),0]+20):
193     if label>325:
194         if label==max(aprox[c:len(aprox),0]):
195             plt.annotate(format(label',.0e'), xy=(x,y+20))
196         else:
197             plt.annotate(format(label',.0e'), xy=(x,y))
198     else:
199         plt.annotate(label, xy=(x,y))
200 plt.savefig("d_vpe_vpo.png", bbox_inches='tight', dpi=200)
201 # =====

```

Cuadro C.1. Datos trimestrales de México, 1993-2018

Año / Trimestre	Consumo del gobierno ^a	Consumo privado ^a	Formación bruta de capital fijo ^a	Variación de existencias ^a	Importación de bienes finales ^b	Importación de bienes intermedios ^b	Importación de bienes de capital ^b	Exportaciones totales ^b	Tipo de cambio ^c
1993/01	134 056.53	1 017 774.94	324 289.55	46 372.24	1 798.68	10 914.75	2 671.22	11 769.29	3.11
1993/02	139 849.02	1 073 692.04	305 642.01	56 521.89	1 879.30	11 660.23	2 779.95	13 046.54	3.11
1993/03	140 634.87	1 079 579.95	323 636.66	19 135.45	1 938.79	11 726.94	2 660.52	12 818.20	3.12
1993/04	154 256.09	1 158 893.15	347 513.68	13 458.38	2 225.58	12 266.20	2 844.38	14 251.93	3.12
1994/01	161 709.76	1 125 906.78	375 637.40	80 398.47	2 067.48	12 964.39	3 041.23	13 775.92	3.17
1994/02	171 024.52	1 215 635.70	373 191.35	85 285.54	2 350.27	13 984.22	3 283.55	15 067.75	3.34
1994/03	167 436.24	1 234 138.85	394 947.53	36 990.27	2 284.03	14 258.33	3 316.14	15 064.15	3.39
1994/04	174 406.13	1 314 877.72	400 588.12	28 922.13	2 808.67	15 306.79	3 680.80	16 974.39	3.64
1995/01	179 617.51	1 284 669.88	343 814.98	116 175.01	1 469.61	14 348.91	2 371.48	18 786.74	6.03
1995/02	195 254.98	1 482 540.91	336 908.71	97 399.75	1 196.54	13 773.30	2 062.77	19 631.46	6.14
1995/03	199 586.21	1 590 023.26	383 658.05	87 100.20	1 216.29	14 598.61	2 057.71	20 087.17	6.21
1995/04	216 167.34	1 765 919.99	447 685.64	125 727.33	1 452.30	15 700.25	2 205.30	21 036.19	7.35
1996/01	232 694.56	1 854 077.06	506 711.90	131 221.40	1 455.89	16 140.09	2 340.07	21 870.38	7.52
1996/02	247 727.30	2 000 318.79	519 842.01	99 680.28	1 455.41	17 351.89	2 602.25	23 606.88	7.48
1996/03	254 501.28	2 123 101.37	600 914.71	85 555.16	1 623.86	18 531.84	2 679.46	24 247.08	7.56
1996/04	279 446.10	2 376 683.97	672 909.58	78 099.34	2 121.61	19 865.80	3 300.59	26 275.40	7.83
1997/01	302 287.82	2 355 533.98	678 673.66	159 187.94	1 518.04	18 982.09	3 028.92	25 098.39	7.86
1997/02	322 560.04	2 606 061.50	743 730.15	113 758.33	2 184.79	20 795.99	3 818.93	27 440.43	7.92
1997/03	327 167.82	2 675 387.74	836 181.30	79 086.66	2 289.54	22 426.69	3 768.92	28 176.38	7.81
1997/04	357 456.29	2 934 217.61	887 128.24	83 889.55	3 097.95	23 434.40	4 461.93	29 716.30	8.07
1998/01	377 536.83	2 921 015.89	948 018.82	176 814.83	2 703.31	23 008.60	4 162.25	28 106.17	8.43

Continúa...

Continuación...

Cuadro C.1. Datos trimestrales de México, 1993-2018

Año / Trimestre	Consumo del gobierno ^a	Consumo privado ^a	Formación bruta de capital fijo ^a	Variación de existencias ^a	Importación de bienes finales ^b	Importación de bienes intermedios ^b	Importación de bienes de capital ^b	Exportaciones totales ^b	Tipo de cambio ^c
1998/02	401 250.40	3 136 284.55	940 477.42	122 107.63	2 584.99	24 040.18	4 397.53	29 871.52	8.68
1998/03	412 399.89	3 261 141.12	1 066 315.32	92 249.82	2 631.74	24 085.12	4 308.48	28 586.59	9.47
1998/04	452 553.02	3 509 423.24	1 102 694.55	110 003.02	3 188.43	25 801.32	4 461.10	30 975.02	10.01
1999/01	489 642.36	3 568 342.77	1 172 569.27	95 967.24	2 442.60	24 127.63	4 576.71	29 940.37	9.94
1999/02	521 168.14	3 801 665.72	1 139 024.65	103 109.73	2 811.78	26 825.43	4 980.46	33 641.11	9.45
1999/03	527 649.66	3 918 757.54	1 254 411.26	55 313.55	2 965.28	28 023.25	5 266.45	35 293.00	9.37
1999/04	568 363.18	4 153 842.28	1 281 098.98	81 205.04	3 955.37	30 293.31	5 706.51	37 487.33	9.46
2000/01	609 975.23	4 201 895.45	1 383 192.04	151 180.28	3 509.77	30 384.61	5 324.60	38 017.74	9.40
2000/02	632 286.66	4 485 433.73	1 381 838.39	131 570.21	3 919.12	32 910.56	5 648.34	41 027.14	9.59
2000/03	633 682.02	4 628 401.55	1 513 123.85	62 565.82	3 968.57	34 693.97	6 214.86	42 783.21	9.35
2000/04	671 730.58	4 874 553.68	1 475 438.34	48 082.59	5 293.10	35 648.22	6 942.14	44 292.64	9.50
2001/01	672 251.58	4 672 918.23	1 440 146.53	117 260.17	4 531.15	31 608.69	5 722.72	39 730.26	9.69
2001/02	696 356.20	4 849 357.45	1 332 612.46	96 879.00	4 763.94	32 154.39	5 603.99	40 748.10	9.18
2001/03	692 564.80	4 872 250.16	1 458 592.05	16 082.60	4 686.95	30 837.15	5 274.52	39 129.15	9.23
2001/04	732 963.74	5 088 672.66	1 405 402.93	24 646.87	5 769.94	31 548.52	5 894.45	39 172.23	9.25
2002/01	738 161.65	4 840 452.83	1 331 951.29	165 075.80	4 366.13	28 833.71	4 921.68	36 677.19	9.11
2002/02	770 824.80	5 225 346.00	1 403 586.43	132 171.91	5 305.65	32 172.87	5 499.09	41 480.50	9.47
2002/03	768 787.57	5 250 586.43	1 503 069.06	87 302.12	5 128.10	32 890.76	4 906.22	41 367.21	9.89
2002/04	817 051.64	5 458 095.01	1 507 889.36	43 796.49	6 378.47	32 610.73	5 665.47	41 521.08	10.17
2003/01	841 323.34	5 256 478.10	1 542 091.85	181 294.93	4 973.26	29 565.99	4 650.16	39 051.49	10.81
2003/02	884 628.06	5 483 515.38	1 512 123.49	119 541.29	4 885.33	32 012.83	4 992.97	40 244.55	10.45
2003/03	850 843.71	5 534 132.37	1 575 135.20	28 611.87	5 214.95	32 788.72	4 968.45	41 543.04	10.71
2003/04	896 116.70	5 830 030.95	1 595 791.25	85 386.77	6 435.49	34 463.93	5 593.77	43 927.35	11.19

Año / Trimestre	Consumo del gobierno ^a	Consumo privado ^a	Formación bruta de capital fijo ^a	Variación de existencias ^a	Importación de bienes finales ^b	Importación de bienes intermedios ^b	Importación de bienes de capital ^b	Exportaciones totales ^b	Tipo de cambio ^c
2004/01	907 627.02	5 640 640.91	1 695 674.47	141 839.43	5 200.68	33 589.94	4 926.28	43 193.01	10.98
2004/02	937 287.55	5 955 078.92	1 791 045.52	207 229.46	5 948.15	37 162.67	5 396.54	47 387.84	11.39
2004/03	899 533.26	6 086 046.68	1 832 711.24	122 580.01	6 314.29	37 807.83	5 699.75	47 874.26	11.45
2004/04	958 978.08	6 445 208.85	1 911 517.13	107 879.99	7 945.86	40 243.28	6 574.39	49 543.44	11.32
2005/01	961 231.13	6 176 929.94	1 905 165.73	134 812.55	6 554.21	36 420.54	5 797.28	46 894.76	11.18
2005/02	1 008 967.19	6 576 518.89	1 950 469.28	96 646.41	7 289.19	41 090.79	6 274.72	53 977.04	10.97
2005/03	992 525.04	6 639 203.69	1 967 492.53	36 298.27	7 686.72	41 578.05	6 606.59	54 183.35	10.71
2005/04	1 061 891.78	6 857 958.41	2 096 163.11	91 921.02	9 982.76	45 001.75	7 536.93	59 177.82	10.71
2006/01	1 078 524.49	6 750 621.59	2 112 334.84	146 743.88	8 237.27	42 953.44	6 928.61	58 852.39	10.60
2006/02	1 115 793.57	7 141 213.96	2 257 080.75	214 897.17	8 758.23	47 767.36	7 406.03	63 779.72	11.18
2006/03	1 071 233.04	7 212 024.43	2 361 997.90	104 521.39	9 534.88	48 568.90	7 658.94	63 139.91	10.95
2006/04	1 133 286.48	7 499 115.15	2 429 623.41	77 962.61	10 370.63	49 342.77	8 531.29	64 153.13	10.89
2007/01	1 140 500.96	7 345 042.77	2 364 026.75	157 876.20	9 142.87	46 051.96	7 527.92	60 269.04	11.02
2007/02	1 200 639.30	7 691 347.19	2 426 664.08	190 080.50	10 501.81	51 128.67	8 333.24	67 655.77	10.87
2007/03	1 180 499.31	7 784 629.30	2 551 401.94	75 329.63	10 924.89	53 358.50	8 380.44	70 269.40	10.96
2007/04	1 266 532.04	8 086 075.64	2 754 760.52	118 281.80	12 484.95	54 756.36	9 357.44	73 681.10	10.85
2008/01	1 244 310.11	7 930 371.20	2 628 697.80	93 548.08	11 259.63	52 234.59	8 237.74	70 084.13	10.81
2008/02	1 337 952.13	8 410 688.29	2 853 134.32	182 129.32	11 922.49	58 312.63	10 032.78	79 402.87	10.43
2008/03	1 309 872.13	8 324 465.21	2 878 769.51	56 736.99	13 266.88	61 159.24	10 468.06	78 466.80	10.32
2008/04	1 409 898.27	8 409 489.45	3 086 170.57	133 302.18	11 491.71	49 858.98	10 358.53	63 388.80	13.04
2009/01	1 393 431.91	7 728 821.76	2 625 853.32	81 439.88	7 020.70	37 574.52	7 361.65	49 664.85	14.38
2009/02	1 458 094.81	7 793 042.76	2 623 124.61	77 935.08	7 167.65	39 378.43	7 016.14	54 012.20	13.31
2009/03	1 432 551.80	8 043 991.92	2 690 814.40	60 035.39	8 854.48	44 809.55	7 643.03	58 520.88	13.27
2009/04	1 513 649.68	8 460 424.93	2 824 969.94	151 525.92	9 785.24	49 149.16	8 624.42	67 505.62	13.06

Continúa...

Continuación...

Cuadro C.1. Datos trimestrales de México, 1993-2018

Año/ Trimestre	Consumo del gobierno ^a	Consumo privado ^a	Formación bruta de capital fijo ^a	Variación de existencias ^a	Importación de bienes ^b finales ^b	Importación de bienes intermedios ^b	Importación de bienes de capital ^b	Exportaciones totales ^b	Tipo de cambio ^c
2010/01	1 496 786.96	8 191 015.02	2 766 614.53	207 833.29	9 104.78	50 315.82	6 804.15	66 596.62	12.76
2010/02	1 585 008.07	8 618 735.08	2 843 282.67	188 815.36	10 055.33	57 678.35	6 991.17	74 641.43	12.57
2010/03	1 560 216.70	8 831 326.55	2 859 818.49	75 139.68	10 269.77	59 874.74	7 696.45	75 589.82	12.80
2010/04	1 651 607.55	9 298 298.71	3 069 584.96	175 355.21	11 992.85	61 943.50	8 754.91	81 645.28	12.39
2011/01	1 644 255.49	8 970 318.17	2 909 996.66	219 464.37	11 583.08	60 603.55	7 706.05	81 801.20	12.06
2011/02	1 708 514.14	9 331 501.54	3 105 666.53	188 470.71	12 688.58	66 678.26	8 676.67	89 282.61	11.73
2011/03	1 718 061.39	9 636 372.31	3 305 363.61	55 615.19	13 851.03	69 022.69	9 094.40	88 087.09	12.31
2011/04	1 837 877.49	10 078 909.43	3 745 365.21	127 351.55	13 667.54	67 715.75	9 555.28	90 262.49	13.63
2012/01	1 839 767.80	9 897 927.02	3 450 147.09	229 466.37	12 819.15	66 131.69	8 954.86	89 608.97	13.00
2012/02	1 896 162.86	10 045 719.25	3 590 282.16	228 428.69	13 310.40	70 296.76	9 334.06	94 308.60	13.57
2012/03	1 859 125.80	10 294 103.45	3 663 796.28	43 563.98	13 223.02	69 661.27	9 531.30	91 234.18	13.17
2012/04	1 963 763.78	10 714 140.29	3 747 151.66	160 430.47	14 919.85	71 821.36	10 747.84	95 618.14	12.94
2013/01	1 912 523.20	10 317 196.06	3 364 545.79	257 660.45	13 647.34	66 619.77	9 079.70	88 228.08	12.65
2013/02	1 963 197.70	10 713 017.10	3 430 953.70	284 393.13	14 338.17	73 432.50	9 790.60	96 662.69	12.48
2013/03	1 968 384.17	10 878 295.83	3 415 749.49	113 480.67	14 500.31	73 171.22	9 608.29	96 307.24	12.91
2013/04	2 093 554.60	11 368 494.77	3 625 965.12	152 411.99	14 843.56	71 599.91	10 578.80	98 817.04	13.03
2014/01	2 062 083.99	10 979 818.90	3 408 460.76	280 428.76	13 264.96	69 590.03	9 209.38	90 759.10	13.23
2014/02	2 090 793.81	11 375 851.46	3 549 971.69	148 505.39	14 269.77	77 017.62	9 576.16	101 870.05	13.00
2014/03	2 127 278.63	11 571 434.25	3 675 050.93	106 510.63	14 898.86	77 879.31	10 061.94	101 120.72	13.12
2014/04	2 248 661.26	12 111 339.17	4 055 135.21	84 699.44	15 865.54	77 544.29	10 799.37	103 161.81	13.87
2015/01	2 257 960.33	11 581 174.09	3 810 144.69	320 411.69	12 673.56	70 307.65	9 623.47	90 460.71	14.95
2015/02	2 275 898.42	11 840 307.89	4 046 947.68	143 067.52	13 454.21	76 258.93	10 272.31	97 976.27	15.33

Año/ Trimestre	Consumo del gobierno ^a	Consumo privado ^a	Formación bruta de capital fijo ^a	Variación de existencias ^a	Importación de bienes finales ^b	Importación de bienes intermedios ^b	Importación de bienes de capital ^b	Exportaciones totales ^b	Tipo de cambio ^c
2015/03	2 248 161.07	12 297 858.67	4 369 901.87	27 864.08	15 162.78	76 782.40	10 617.32	95 890.31	16.43
2015/04	2 368 232.59	12 932 143.56	4 485 293.64	69 076.02	14 988.81	74 364.13	10 726.81	96 222.30	16.76
2016/01	2 349 138.77	12 452 013.88	4 283 785.14	336 504.33	11 721.62	68 521.82	8 889.94	85 146.83	18.06
2016/02	2 412 627.70	12 824 465.62	4 504 366.90	201 353.93	12 505.99	74 438.41	9 869.21	93 746.17	18.11
2016/03	2 393 451.28	13 331 775.33	4 665 180.02	55 162.05	13 727.96	75 965.00	10 462.04	94 918.85	18.75
2016/04	2 515 113.99	14 153 946.45	4 994 738.35	84 542.71	13 994.72	76 470.16	10 497.64	100 134.85	19.84
2017/01	2 526 625.83	13 718 762.94	4 805 083.64	356 311.36	13 055.59	75 171.01	9 253.03	94 708.75	20.33
2017/02	2 568 426.06	14 063 805.48	4 730 941.67	200 520.93	13 286.14	79 759.47	9 913.64	102 657.44	18.54
2017/03	2 522 967.79	14 348 343.37	4 810 109.96	71 669.85	14 722.61	82 519.46	10 658.47	101 851.48	17.82
2017/04	2 673 080.31	15 097 438.55	5 052 831.91	102 755.55	16 268.70	84 571.80	11 189.22	110 183.41	18.96
2018/01	2 687 714.89	14 534 067.75	4 949 016.43	383 926.90	14 523.59	82 060.11	10 434.86	105 242.02	18.74
2018/02	2 766 519.21	15 104 267.30	5 231 051.83	192 891.26	15 354.45	89 927.28	11 332.91	113 841.81	19.43
2018/03	2 667 651.25	15 291 482.50	5 274 734.95	99 234.55	16 462.57	91 157.19	12 116.38	114 062.56	18.96
2018/04	2 805 468.19	15 909 520.09	5 365 900.29	168 798.80	16 770.73	92 135.59	12 000.95	117 425.77	19.82

^a Millones de pesos a precios corrientes. Tomados del Banco de Información Económica del Instituto Nacional de Estadística y Geografía, <<https://www.inegi.org.mx/sistemas/bie/>>.

^b Millones de dólares. Tomados del Banco de Información Económica del Instituto Nacional de Estadística y Geografía, <<https://www.inegi.org.mx/sistemas/bie/>>.

^c Promedio trimestral pesos por dólar (USD).

Fuente: elaboración propia con datos de la serie histórica diaria del tipo de cambio peso-dólar - (CF373) de Banco de México, <<https://www.banxico.org.mx/SieInternet/>>.

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

N, Z, R, C	números naturales, enteros, reales y complejos
Z^+, R^+	enteros positivos y reales positivos
N_n, Z_n^+	primeros n naturales y primeros n enteros positivos
Z^{+0}	enteros no negativos
$N_{r:s}$	números naturales entre r y s , si $s = \infty$ son los naturales mayores a r
$\in, \forall, \exists, \exists!$	pertenece a, para todo, existe algún, existe un único
$\subseteq, \supseteq, \subset, \supset$	subconjunto, superconjunto, subconjunto propio y superconjunto propio
$A/B, A-B$	diferencia de conjuntos
$A \times B$	producto cartesiano de conjuntos
R^n, C^n	espacios vectoriales de n -adas de números reales y complejos
$M_{\mu \times \eta}$	espacio vectorial de las matrices $\mu \times \eta$
$M_{\mu \times \eta}(F)$	espacio vectorial de las matrices $\mu \times \eta$ sobre un campo F
It_n	espacio de las matrices triangulares inferiores en R
$dim(V)$	dimensión del espacio vectorial V
\mathbf{u}	vector (letra minúscula en negrita)
A	matriz (letra mayúscula en itálica)
\mathbf{u}', A'	transpuesta de un vector, transpuesta de una matriz
$\bar{a}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{A}$	conjugación compleja de un número, vector o matriz

- \mathbf{u}^*, A^* vector o matriz conjugada: $\mathbf{u}^* = \overline{\mathbf{u}}', A^* = \overline{A}'$
 $0, 0_{m,n}$ vector nulo y matriz nula del espacio $M_{m \times n}$
 A^{-1}, A^t, A^{-t} inversa, potencia t -ésima de la matriz A y de A^{-t} , respectivamente
 I_n matriz identidad en el espacio $M_{n \times n}$
 $\det(A)$ determinante de la matriz $A \in M_{n \times n}$
 $\mathbf{u}(k), A(k)$ vector y matriz parametrizados con parámetro k
 $A_{i,j}, A_{:,j}, A_{i,:}$ elemento i, j , columna j -ésima, fila i -ésima de la matriz A
 $[\mathbf{u}]_B$ el vector coordenado del vector \mathbf{u} en base B
 $A_{r_1:r_2, s_1:s_2}$ submatriz de $A \in M_{m \times n}$, tomando $A_{i,j}$, $i \in N_{r_1:r_2}$ y $j \in N_{s_1:s_2}$
 $A_{:,s_1:s_2}$ submatriz de $A \in M_{m \times n}$, tomando $A_{i,j}$, $i \in N_m$ y $j \in N_{s_1:s_2}$
 $A_{r_1:r_2,:}$ submatriz de $A \in M_{m \times n}$, tomando $A_{i,j}$, $i \in N_{r_1:r_2}$ y $j \in N_n$
 $\{l(k)\}_{k \in N}, L_N$ sucesión infinita de matrices
 $\{l(k)\}_{k \in N_n}, L_{Nn}$ sucesión parcial con n matrices
 $\{L_N\}, \{L_{N_k}\}$ conjunto de elementos de $\{L_N\}$ y L_{N_k} , respectivamente
 $H_{m,n}(L_N)$ matriz de Hankel de m por n submatrices de la sucesión L_N
 $H_{m,n}(L_{N_k})$ matriz de Hankel de m por n submatrices de la sucesión parcial L_{N_k}
 $\delta(k)$ delta de Kronecker

BIBLIOGRAFÍA

- Allemang, R. J. y D. L. Brown [1998], “A unified matrix polynomial approach to modal identification”, *Journal of Sound and Vibration*, 211(3): 301-322, <<https://cutt.ly/y4Vr1Fy>>.
- Antezana, J. y D. Stojanoff [2009], *Cursos y seminarios de matemática. Análisis matricial*, Buenos Aires, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, fascículo 3, serie b ed., <<https://cutt.ly/g4VtT5V>>.
- Antsaklis, P. J. y A. H. Michel [2007], *A linear systems primer*, Boston, Birkhauser.
- Arun, K.; S. Kung y D. Rao [1983], “State space and singular value decomposition based on approximation methods for harmonic retrieval”, *Journal of the Optical Society of America* 73: 1 799-1 811, <<https://cutt.ly/n4VrjmS>>.
- Ballesteros, Y.; J. C. Del Real, N. Ponso, L. Molisani y A. Zapico [2012], “Eliminación de ruido de señales acústicas usando descomposición de valores singulares y análisis de componentes principales”, *Mecánica Computacional*, 31(26): 4 013-4 027, <<https://cutt.ly/h4Vr48V>>.
- Bay, J. [1999], *Fundamentals of linear state space systems*, Boston, McGraw-Hill.
- Bullard, C. y A. Sebald [1977], “Effects of parametric uncertainty and technological change on input-output models”, *Review of Economics and Statistics*, MIT Press, 59(1): 75-81, <<https://www.jstor.org/stable/1924906>>.

- Cabrer, B.; J. Olmos, J. M. Pavia y R. Sala [2007], “Actualización de matrices origen-destino. Un análisis de alternativas a través de Monte Carlo”, *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de Asepuma Actas*, 15(1), <<https://cutt.ly/37T1Ysp>>.
- Casti, J. [1987], *Linear dynamical systems*, Orlando, U. S., Academic Press, Inc.
- Chen, C. T. [1984], *Linear system theory and design*, Nueva York, Holt, Rinehart and Winston.
- Figuroa, M.; J. de J. Rubio; J. Pérez Cruz y J. Rumbo [2012], “Control para estabilizar y atenuar las perturbaciones en un péndulo invertido rotatorio”, *Revista Mexicana de Física* (58): 107-112.
- Friedland, B. [1986], *Control system design - An introduction to state-space methods*, Nueva York, Dover Publications.
- Hair, J. F.; R. E. Anderson; R. L. Tatham; W. C. Black [1999], *Análisis multivariante*, Madrid, Prentice-Hall.
- Haro G., R. [2008], *Metodologías para la estimación matemática de la matriz insumo-producto simétrica*, Orlando, Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos e Inegi, <<https://cutt.ly/l4Vrifk>>.
- Hinrichsen, D. y A. Pritchard [2005], *Mathematical systems theory I. Modelling, state space analysis, stability and robustness*, Berlín, Springer Verlag.
- Hoffman, K. y R. Kunze [1971], *Linear algebra*, 2a ed., Nueva Jersey, Prentice-Hall.
- Inegi [2014], *Sistema de Cuentas Nacionales de México. Desarrollo de la matriz insumo producto 2012. Fuentes y metodologías*, México, <<https://cutt.ly/u4Vrn1E>>.
- Kailath, T. [1980], *Linear systems. Englewood cliffs*, Nueva Jersey, Prentice-Hall.
- Kalman, R. E. [1971], “On minimal partial realizations of a linear input/output map”, en R. E. Kalman y N. Declaris (eds.), *Aspects of network and system theory*, Nueva York, Holt, Rinehart and Winston: 385-407.

- Kalman, R. E. [1963], “Mathematical description of linear dynamical systems”, *SIAM Journal on Control*, 1(2): 152-192, <<https://cutt.ly/k7T3Oyn>>.
- Kung, S. y K. Arun [1987], “Singular-value-descomposition algorithms for linear systems approximation and spectrum estimation”, *Advances in statistical signal processing*, vol. 1, Nueva York, JAI Press Inc.: 203-250, <<https://cutt.ly/J4VrLC3>>.
- Lay, D. C., S. R. Lay y J. J. McDonald [2016], *Linear algebra and its applications*, 5a ed., Pearson.
- Lazzarri, L. y M. Moriñigo [2003], “El enfoque de Buckley del modelo de insumo-producto en condiciones de incertidumbre”, *Cuadernos de Cimbage* 6: 93-109, <<https://cutt.ly/N4VrVG0>>.
- Ljung, L. [1999], *System identification: Theory for the user*, Nueva Jersey, Prentice-Hall.
- Miller, R. y P. Blair [2009], *Input-output analysis. Foundations and extensions*, Nueva York, Cambridge University Press.
- Molina, H. y R. Gutiérrez [2015], “Reformulación del modelo de Leontief a través de redes de Petri”, *Ciencia y Tecnología* (15):82-96, <<https://cutt.ly/q4Vtbuj>>.
- Parra Márquez, J. C. y O. Pino Arriagada [2012], “Aplicación del método RAS y entropía cruzada para actualización de matrices insumo-producto”, *European Scientific Journal*, 8(20), consultado en <<https://cutt.ly/K7T2tIM>>.
- Rowell, D. [2002a], *2.14 Analysis and design of feedback control systems state-space representation of LTI systems*, Class Handouts, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, <<https://cutt.ly/qwqquSI2>>.
- Rowell, D. [2002b], *2.14 Analysis and design of feedback control systems time-domain solution of LTI state equations*, Class Handouts, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, <<https://cutt.ly/kwqquXQq>>.

- Sanliturk, K. y O. Cakar [2005], “Noise elimination from measured frequency response functions”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 19(3): 615-631.
- Schuschny, A. R. [2005], *Tópicos sobre el modelo de insumo-producto: teoría y aplicaciones*, Santiago de Chile, ONU y División de Estadística y Proyecciones Económicas, Cepal, <<https://cutt.ly/W4VtyVl>>.
- Schutter, B. D. [2000], “Minimal state-space realization in linear system theory: An overview”, *Journal of Computational and Applied Mathematics, Special Issue on Numerical Analysis in the 20th Century*, 121(1-2): 33-354, <<https://cutt.ly/J7T2lUh>>.

SEMBLANZA

Armando Rangel Galán es doctorante en Economía por el Posgrado de Economía de la UNAM. Cuenta con estudios de posgrado en Estadística Aplicada por el IIMAS-UNAM, con maestría y licenciatura en Economía por la Facultad de Economía, así como estudios en Física y Matemáticas por la Facultad de Ciencias, UNAM. Se ha desempeñado como docente de materias como estadística, econometría, álgebra lineal y modelos económicos, entre otras, en los niveles de licenciatura y posgrado en diversas facultades y entidades de la UNAM. Su experiencia laboral abarca instituciones como la Oficialía Mayor de Hacienda, donde realizó análisis y consulta de adquisiciones públicas; la Dirección General de Difusión de las Ciencias, UNAM; y el Centro de Estudios de la Opinión Pública, UNAM. Actualmente imparte varios cursos en el IIEC, UNAM. Con la presente investigación obtuvo el primer lugar en la versión externa del Premio Anual de Economía Maestro Jesús Silva Herzog, organizado por el IIEC, en su edición 2021.